

となり、ベクトル場の大きさは原点からの距離に反比例することが理解できる。

さらに、ベクトル (x, y) を 90° だけ回転させたベクトルが $(y, -x)$ となることを知っているので、このベクトル場は、原点からのベクトルを 90° だけ回転させた方向であることが理解できる。

以上、2 点 (距離に反比例、 90° 回転) を式から即座に理解できるように訓練してください。

(2) 答え

$$\frac{1}{a} \times 2\pi a = 2\pi$$

【理由】頭の中で、この線積分を行うために、曲線 C つまり、半径 a の円周を細かく分ける。そこでのベクトル A は、接線方向を向いているので、その内積は大きさをかけたもの。つまり、 $A dl$ となる。これを一周にわたって計算するから、 $A \times 2\pi a$ になると理解できる。 A の大きさ A は、円周上のどこでも大きさが同じだから、適当に $(a, 0)$ を考えると、 $A = (0, -\frac{1}{a}, 0)$ なので、 $A = \frac{1}{a}$ 。よって、 $\frac{1}{a} \times 2\pi a$ 。

これだけのことを頭の中でできるように訓練せよ。

☞ この問題は、 z 軸方向に電流を流したときにその周辺にできる磁場を考えている。

問題 60 まず、面上の単位ベクトルを求める。曲面上の単位ベクトル n は、

$$n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

で与えられる。(22 ページ、問題 47 参照。) 今、 $\phi(x, y, 0) = x^2 + y^2 + z - 1 = 0$ であるから、

$$n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{2xi + 2yj + k}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

となる。

ここで、最終的には積分を

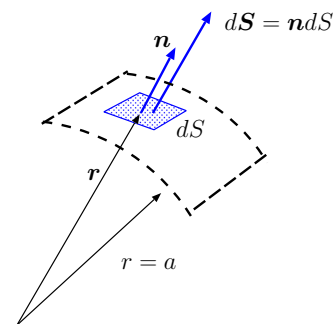
$$\int_S dS \rightarrow \iint dxdy$$

に変換したいので (そうでないと、計算できない)、 xy 平面に射影することを考える。(射影に関しては、22 ページ 問題 48 を参照のこと。) 曲面上の dS を xy 平面に射影した面積 dS' は、

$$dS' = \cos \theta dS$$

(2) 原点を中心として放射状に出ているベクトル場。また、原点からの距離の 2 乗に半比例して大きさは小さくなっている。

(3) 半径 $r = a$ の球面上の接する面積 dS の部分を書き、それに対する法線ベクトル n を書く。(図は、点線で書いた部分は球面のつもり。)



(4) ベクトル場 A と法線ベクトル n の向きは同じであるので、

$$A \cdot dS = AdS$$

また、 $r = a$ でのベクトル A の大きさは、

$$\frac{k}{a^2}$$

だから、

$$A \cdot dS = \frac{k}{a^2} dS.$$

(5) 積分は、

$$\int_S A \cdot dS = \int_S \frac{k}{a^2} dS$$

と書ける。よって、

$$= \frac{k}{a^2} \int_S dS = \frac{k}{a^2} \times 4\pi a^2 = 4\pi k.$$

(6) S を半径 $2a$ としても、

$$4\pi k$$

となる。(前問で、積分結果が a に依存していないことから計算しなくても分かる。)

☞ この問題は，原点に正の点電荷 Q を置いたときに，その周辺にできる電場の様子を表している．つまり，

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

である．また，面積分をする領域を原点を含んでいる限り，どのような領域を考えても，面積分の結果は同じになる．つまり，積分結果は領域内部の総電荷量にのみ関係しているからである．

問題 62 (1) 風船のような図を書き，その内部が領域 V ，風船の表面が閉曲面 S ．

(2) 閉曲面上に，微小な面 (面素) を書く．その面の大きさが dS の大きさ．向きは面の法線ベクトルの向き．

問題 63 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ であるので，その発散は，

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

である．ガウスの定理より，

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \int_V dV = 3V.$$

問題 64

$$\nabla \cdot (r^{n-1}\mathbf{r}) = (n+2)r^{n-1}$$

である． $n = -1$ を代入すると，

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2}$$

よって，ガウスの定理より，

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} \right) dV = \int_V \frac{1}{r^2} dV = \int_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^2}$$

問題 65 ガウスの定理より，

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} dV$$

また，ベクトル公式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

だから，積分は 0 となり，証明された．

☞ ここで， $\mathbf{A}$ は一般的なベクトル関数であるが，電磁気の知識よりこの $\mathbf{A}$ をベクトルポテンシャルとみれば， $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ であり， $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ であることを思い出すと考えやすい．

問題 66 (1) 楕円のような図を書き，その内部が領域 S ，縁が閉曲線 C ．

(2) 閉曲線上に，微小な線分 (線素) を書く．その線の長さが $d\ell$ の大きさ．向きは線の接線ベクトルの向き．

問題 67 $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ であるから，ストークスの定理より，

$$\int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

問題 68 ストークスの定理より，

$$\int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

ベクトル公式 $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ であるから，

$$\int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が成り立つ．

問題 69 磁束の定義に， $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を代入すると，

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの定理を用いると，

$$\Phi = \int_C \mathbf{A} \times d\ell$$

となって，線積分で表される．

問題 70 x 軸座標を斜面下向きにとる．力 F は重力 mg の $\sin$ 成分である．したがって， x 方向の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \theta$$

この微分方程式を解くと、

$$v = gt \sin \theta + C$$

初期条件 $t = 0$ で $v = 0$ より $C = 0$ であるから、 $v = gt \sin \theta$ t 秒後の位置 x を求めるには v を t で積分すればよいので、

$$v = \frac{dx}{dt} = gt \sin \theta$$

初期条件 $t = 0$ で $x = 0$ であるから、

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \sin \theta.$$

問題 71 (1) x 軸を鉛直上向きにとると、重力は $-mg$ となる。運動方程式は、

$$m \frac{dv}{dt} = mg$$

より、 $v = -gt + c_0$ 。初期条件 $t = 0$ で $v = v_0$ より $c_0 = v_0$ 。よって t 秒後の速度は、 $v = -gt + v_0$ 。また v を時間 t で積分して

$$x = \int (-gt + v_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + c_1.$$

よって、打ち上げた点を原点 ($x = 0$) とすると、初期条件は $t = 0$ で $x = 0$ となるから $c_1 = 0$ 。つまり

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

(2) 最高点に達する点は

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t = -\frac{1}{2}g \left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t \right) = -\frac{1}{2}g \left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

よって $t = \frac{v_0}{g}$ のとき x は最大値 $\frac{v_0^2}{2g}$ をとる。

(3) 元の位置に戻ってくるのは、前の問いで出た式で $x = 0$ の時だから

$$0 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0 \times t_2, \text{ より } t_2 = \frac{2v_0}{g}.$$

(4) 元の位置に戻ってきた時の速度は、(3) の答えを (1) に代入して $v' = -v_0$ 。

問題 72 鉛直下向きを y 軸の正にとり、水平方向を x 軸の正にとる。

鉛直方向の運動方程式は、

$$m \frac{dv_y(t)}{dt} = mg$$

$$v_y(t) = \int g dt = gt + c_1$$

$v_y(0) = 0$ より $v_y(t) = gt$ 。また

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = gt$$

なのでこの両辺を積分すると

$$y(t) = \int g t dt = \frac{1}{2}gt^2 + c_2$$

$y(0) = 0$ より $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$ 。地面に達した時の時間を t_1 とすると $y(t_1) = h$ となるので、 $h = \frac{1}{2}gt_1^2$ 。 $t \geq 0$ より $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ 。 x 方向の運動は等速運動なので

$$x(t_1) = v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

地面に落ちた時の速度 $v(t_1)$ は

$$v(t_1) = \sqrt{v_y^2(t_1) + v_0^2} = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

y 軸からの角度を θ とすると

$$\theta = \arctan \frac{v_0}{\sqrt{2gh}}$$

問題 73 (1) 特性方程式 $t^2 + 9 = 0$ $\therefore t = \pm 3i$ $\therefore y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ 。

(2) 特性方程式 $t^2 - 5t + 6 = 0$ $\therefore t = 2, 3$ $\therefore y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ 。

(3) 特性方程式 $t^2 - 6t + 9 = 0$ $\therefore t = 3(\text{重根})$ $\therefore y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$ 。

(4) 特性方程式 $t^2 + 4t + 5 = 0$ $\therefore t = -2 \pm i$ $\therefore y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ 。

(5) 特性方程式 $t^2 - 3t + 2 = 0$ $\therefore t = 1, 2$ $\therefore y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ 。

(6) 特性方程式 $t^2 - 3t = 0$ $\therefore t = 0, 3$ $\therefore y = C_1 + C_2 e^{3x}$ 。

(7) 特性方程式 $t^2 + 4t + 4 = 0$ $\therefore t = -2(\text{重根})$ $\therefore y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$ 。

(8) 特性方程式 $t^2 + 2t + 2 = 0$ $\therefore t = -1 \pm i$ $\therefore y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ 。

問題 74 この微分方程式の特性方程式は, $t^2 + k^2 = 0 \quad \therefore t = \pm ki$. よって, 一般解は,

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$

(1) 初期条件を代入して, $C_1 = h, C_2 = 0$. ゆえに, $y = h \cos kx$.

(2) 初期条件を代入して, $C_1 = 0, C_2 = \frac{v_0}{k}$. ゆえに, $y = \frac{v_0}{k} \sin kx$.

問題 75 偏微分すればよい.

(1)

$$u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad u_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

よって,

$$u_{xx} = \frac{-2x(3y^2 - x^2)}{(z^2 + y^2)^3}, \quad u_{yy} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(z^2 + y^2)^3}$$

(2)

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

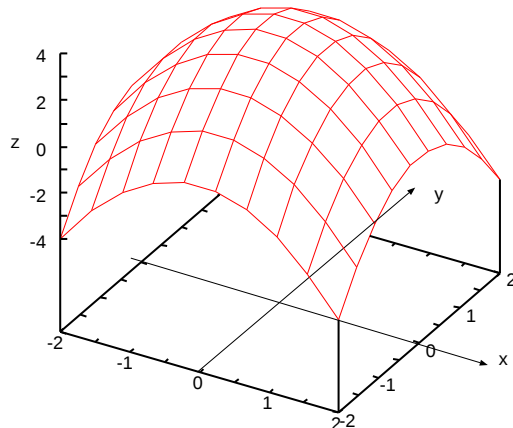
よって,

$$u_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

いずれも, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ を満たす.

☞ 三次元で $\Delta u = \nabla^2 = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ をラプラシアンと言う.

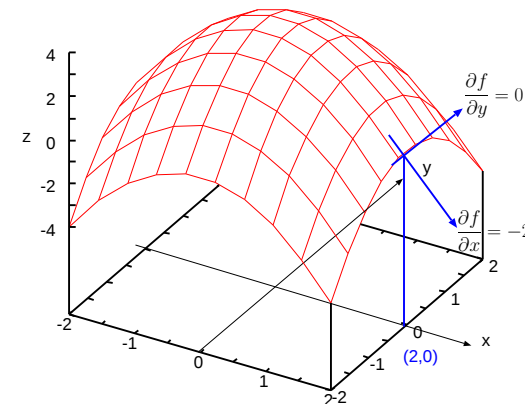
問題 76 (1) 図は, 次の通り. 原点で最大値 4 を取る上に凸の曲面.



$$(2) \frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$(3) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(2,0)} = -2x|_{(2,0)} = -4, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(2,0)} = -2y|_{(2,0)} = 0$$

(4) 図は, 次の通り.



偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ は, y を止めたときの変化量. また, 偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ は, x を止めたときの変化量である. つまり, 点 $(2, 0)$ での x 方向の微分係数と y 方向の微分係数を表す.

☞ 22 ページ 問題 47 参照.

問題 77 (1) まず, 「グラフを書け」と言われたら, 座標軸と原点を書き入れること. また, 座標軸には矢印をいれる. これは, 基本

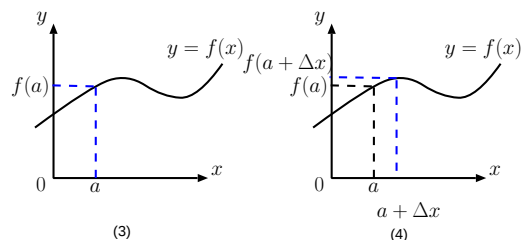
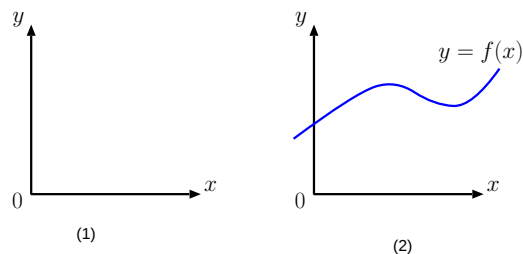
(2) そのあとで, グラフを書き入れる. 分かる範囲で x 軸や y 軸との交点や漸近線などがあれば書き入れる.

(3) $x = a$ での y の値は, $f(a)$.

(4) $x = a$ から少し離れた $a + \Delta x$ での y の値は, $f(a + \Delta x)$.

$f(a + \Delta x)$ は, $f(a)$ とそこでの微分係数を用いて

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x$$



と書くことができる．これは，テーラー展開の二項目までを取った形である．

問題 78

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos a + \frac{(x-a)}{1!} \sin a - \frac{(x-a)^2}{2!} \cos a + \cdots \\ &= \cos a + (x-a) \sin a - \frac{(x-a)^2}{2} \cos a + \cdots \end{aligned}$$

問題 79 $a \ll b$ であるから， $\frac{a}{b}$ が非常に小さくなる (0 に近くなる) ことを利用できるように式を変形する．

(1) 与式 $= b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} + 1 \right) \doteq b^2$. (ちょっと近似しすぎ?)

(2) 与式 $= b \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^{1/2} \doteq b \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \right)$.

問題 80 (1) $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \doteq 1 + \frac{1}{2}x$.

(2) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} \doteq 1 - \frac{1}{2}x$.

(3) x を rad 単位に直すと， $\frac{\pi}{180}x$. $\therefore \sin x = \sin \frac{\pi}{180}x \doteq \frac{\pi}{180}x$.

問題 81 オイラーの式より，

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (1)$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta. \quad (2)$$

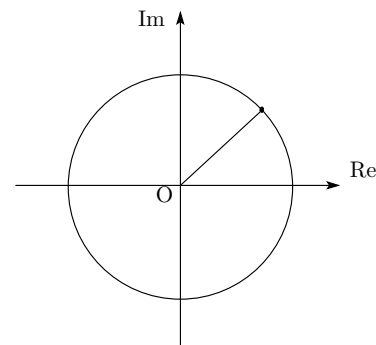
①+②より，

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

①-②より，

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

問題 82 単位円 (半径 = 1) 上の点を表す．横軸は， Re と表示し，縦軸は， Im と表示する． Re は，real part(実部)， Im は，imaginary part(虚部) の意味．



問題 83 オイラーの式より， $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. よって， $\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$.

別解 α, β を実数として， $\sqrt{i} = \alpha + i\beta$ と仮定する．両辺 2 乗して， $i = \alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta$ となる．これより，

$$\alpha^2 - \beta^2 = 0$$

$$2\alpha\beta = 1$$

より， α, β を計算してもよい．

問題 84

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

これに, $x = i\theta$ を代入して,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

となる. また,

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

であるから,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

となる.

問題 85

$$\begin{aligned} \sinh i\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(\cos \theta + i\sin \theta - \cos \theta + i\sin \theta) = i \sin \theta. \\ \cosh i\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(\cos \theta + i\sin \theta + \cos \theta - i\sin \theta) = \cos \theta. \end{aligned}$$

問題 86

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

問題 87 向きは, 波動の伝搬方向. 大きさは, 波長を λ としたとき, $\frac{2\pi}{\lambda}$.

問題 88 最初の式を時間で微分し,

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

ここの磁場の時間微分の項に二番目の式を代入し,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

ベクトル公式を使って,

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

真空中なので, $\rho = 0$ だから,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

であることを用いて,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

これは, 波動方程式の形をしている.