

となるから、左辺は次のようになる．

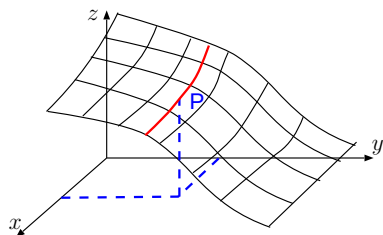
$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) \\ &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot (0, 0, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

問題 47 (1)

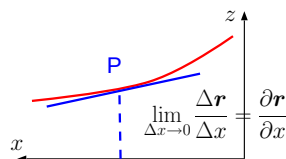
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{k} = \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} &= \frac{\partial x}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{k} = \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{k} \end{aligned}$$

(2) それぞれ、 x 方向 y 方向の偏導関数であるから、 x 方向、 y 方向の微分係数．

曲面 $\mathbf{r}(x, y)$ は、図のように表すことができる．曲面上に点 P を考える (図 1)． $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ の意味は、 y を定数と見なして x で微分することである．つまり、図の点 P において考えると、 y は一定にして、 x 方向に少しだけ増加したときの増分 $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta x}$ を考えればよいことになる．つまり、赤の曲線に沿った方向である．この様子を見易くするために、 $y > 0$ の方向から原点を見る方向で見ると図 (2) のようになる．この極限を考えると、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ となる．また、その方向は y を一定としたときの x 方向の傾きとなる．つまり接線である．



(1)



(2)

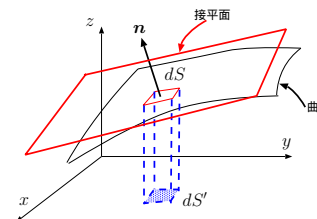
(3) 面の法線ベクトル．(面に垂直) 前問で $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ は、接線方向であることが理解できた．点 P の周辺の微小領域で面を考えるとその面は、曲面に対しての接平面になり、その平面を決める二つのベクトルは、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ と $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ になることが想像できるであろう．それらの外積は、接平面に対して法線方向になる．

(4) 単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は、大きさを割ればよいから、

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right|}$$

44 ページ 問題 76 参照．

問題 48 (1)



(2) xy 平面に射影された面積を S' とすると、

$$S' = \cos \theta dS$$

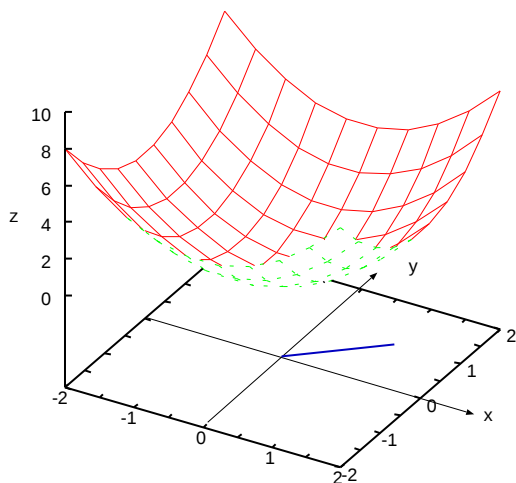
ここで、 θ は、 dS の面の法線ベクトルと z 軸とのなす角．内積を考えて

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z|}$$

ここで、 $\mathbf{e}_z$ は、 z 方向の単位ベクトル．以上より、射影された面積 dS' は、

$$dS' = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z|} dS$$

問題 49 (1) 関数のグラフ．このグラフは、 $(0, 0)$ で最小値 0 を取る．



(2) 曲線 C は、青の線で書かれている。

(3) 問題の積分は s に対して行う。積分を行うには、パラメーター t と s の関係が必要になる。 $(t$ は、曲線 C に沿っていない。)

(4)

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{g'(x)\}^2} dx$$

問題 50 (1) 図は $(1, 0)$ を中心とした半径 1 の円。

(2) 曲線は θ をパラメータとして、

$$x = 1 - \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad \theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

と書くことができる。

(3)

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$

よって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta)(\sin \theta + 1)^2 \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = -\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{3}.$$

問題 51 この関数は x と y について対称であり、グラフは z 軸に関して対称である。よって、曲線 C 上でのどの点でも、その関数値は、1 である。よって、

$$\int_C (x^2 + y^2) ds = (\text{円周}) \times 1 = 2\pi.$$

問題 52 (1) 省略。

(2)

$$dS = 2\pi r dr$$

半径 r の円を考え、その外側に半径 $r + dr$ の円を考える。その間の面積は、(半径 r の円周) $\times dr$ と書ける。

(3)

$$dM = 2\pi r \rho(r) dr$$

(4) 上を積分して、

$$M = \int_0^R 2\pi r \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr = \frac{1}{3} \pi \rho_0 R^2.$$

問題 53 放物面上の点へのベクトルは、

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$$

と書くことができる。曲面の法線ベクトル $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ を求めると、

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (1, 0, -2x) \times (0, 1, -2y) = (2x, 2y, 1)$$

より、

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

よって, xy 平面に射影することにより,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{2y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| dx dy \\
 &= \int (2y^2 + z) dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2 + 2r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{r^4}{2} \sin^2 \theta \right]_0^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (4 + 8 \sin^2 \theta) d\theta \\
 &= 16\pi.
 \end{aligned}$$

(途中で, 極座標変換をした)

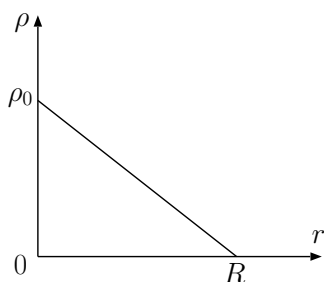
問題 54 領域 R の内部の総電荷量.

問題 55

$$M = \int_R n(x, y, z) dx dy dz$$

ここで, R は, 地球の内部.

問題 56 (1) 図のような一次関数.



(2) $dV = 4\pi r dr$ 半径 r の球面を考え, それに微小な高さ dr の部分が乗っていると考え
る. よって, (半径 r の球面の表面積 $= 4\pi r$) $\times$ (微小な高さ dr) となる.

(3) $dM = 4\pi r \rho(r) dr$

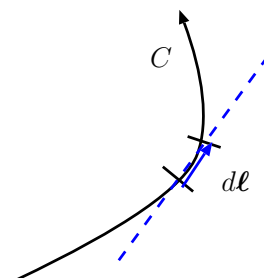
(4)

$$M = \int_0^R 4\pi r \rho(r) dr = \int_0^R 4\pi r \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr = \frac{2}{3} \pi \rho_0 R^2.$$

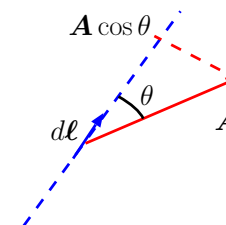
問題 57 (1)

曲線 C を描き, 接線方向にベクトル $d\ell$ を書く.

(2) ベクトル A を書いて, それと $d\ell$ との内積を書く.

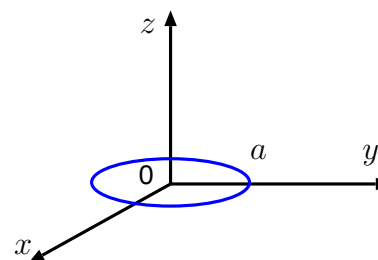


(1)



(2)

問題 58 (1) 原点中心, 半径 a の円.

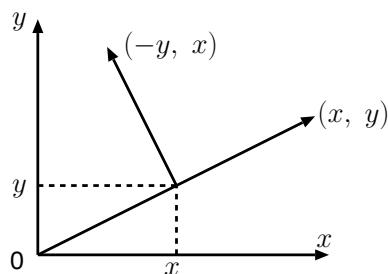


(2) $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$

(3) 円周上の微小な長さ $d\ell$ は, その見込む角を $d\theta$ とすると,

$$d\ell = a d\theta$$

と書ける．その点を (x, y) と書くと，それに垂直な方向は，成分が (x, y) のベクトルを 90° だけ回転させればよいから， $(-y, x) = (-a \sin \theta, a \cos \theta)$ と書くことができる．よって，求めるベクトルはこのベクトルに平行で大きさが $d\ell = a\theta$ のベクトルである．



求めるベクトルを

$$\mathbf{b} = k(-a \sin \theta, a \cos \theta)$$

とおいて， $|\mathbf{b}| = d\ell$ とすると，

$$k = \frac{d\ell}{a}$$

となる．よって，求めるベクトルは，

$$\frac{d\ell}{a}(-a \sin \theta, a \cos \theta) = d\ell(-\sin \theta, \cos \theta)$$

となる．

【別解】 $d\ell$ は， $d\ell = a d\theta$ と書ける． C 上の点は， $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ と書けるので，これに垂直な単位ベクトル $\mathbf{e}$ は，

$$\mathbf{e} = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

である．よって，求めるベクトルは，

$$a d\theta \mathbf{e} = a d\theta(-\sin \theta, \cos \theta)$$

(4) なす角が常に $\theta = 60^\circ$ なので，内積が計算できる．

$$\mathbf{A} \cdot d\ell = |\mathbf{A}| |d\ell| \cos \theta = \frac{A d\ell}{2}.$$

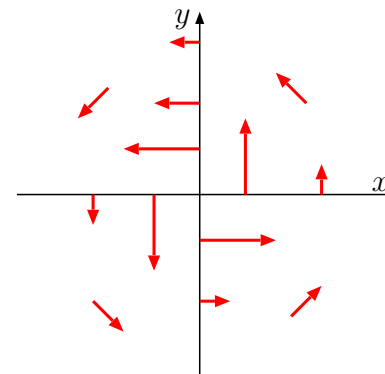
(5) 積分は，

$$\int_C \frac{A}{2} d\ell$$

と書けるから，

$$\int_C \frac{A}{2} d\ell = \frac{A}{2} \times 2\pi a = \pi a A.$$

問題 59 (1) 図は，少しいい加減です．このベクトル場は，原点から離れるにしたがって大きさが原点からの距離に反比例し，向きは原点を中心に描いた円の接線方向．



【理由】ベクトル場の大きさは，

$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

原点からの距離を r とすると，

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

だから，

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \frac{1}{r}$$