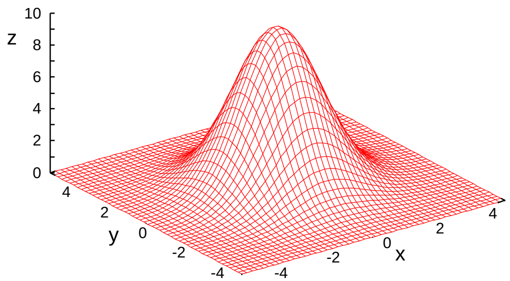
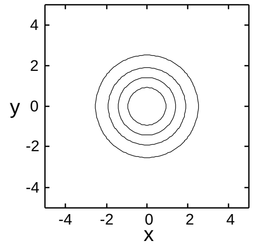
問題 27 一般に，3 次元のグラフを描くのは難しいが，上の問題のグラフを y 軸に関して一回転させればいいことが分かれば何とか描ける．



問題 28

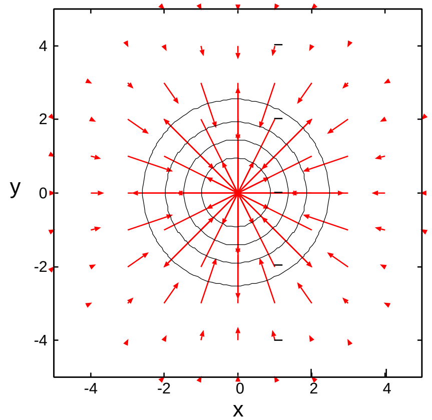


図の等高線は，外側から $z=2$，$z=4$，$z=6$，$z=8$ の値となっている．

問題 29 勾配を計算すると，

$$\nabla z = \nabla 10 \exp(-\frac{x^2+y^2}{4}) = \left(-5x\exp(-\frac{x^2+y^2}{4}), -5y\exp(-\frac{x^2+y^2}{4})\right)$$

これに，格子点の値 $(-5 \leq x \leq 5,\ -5 \leq y \leq 5)$ を代入して，勾配ベクトルを求めると以下のような図になる．



ベクトルの向きは，等高線と直交している．また，ベクトルの向きは山の高い方へ向いている．登山にたとえると，勾配ベクトルの向きは勾配の急な方向，大きさはその傾斜に比例する．

一般に，3 次元の勾配の場合，その点での関数値が大きくなる方向を向くことになる．

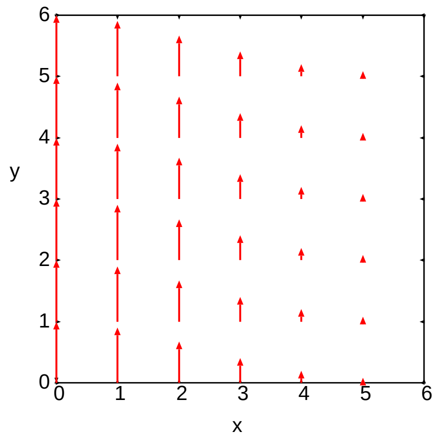
問題 30

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{f} &= \left\{\frac{\partial(z-x)}{\partial y} - \frac{\partial(y-z)}{\partial z}\right\}\boldsymbol{i} + \left\{\frac{\partial(x-y)}{\partial z} - \frac{\partial(z-x)}{\partial x}\right\}\boldsymbol{j} \\
&\quad + \left\{\frac{\partial(y-z)}{\partial x} - \frac{\partial(x-y)}{\partial y}\right\}\boldsymbol{k} \\
&= (0+1)\boldsymbol{i} + (0+1)\boldsymbol{j} + (0+1)\boldsymbol{k} \\
&= (1,1,1). \\
\nabla \times \boldsymbol{g} &= \left\{\frac{\partial(z^2+xy)}{\partial y} - \frac{\partial(y^2+zx)}{\partial z}\right\}\boldsymbol{i} + \left\{\frac{\partial(x^2+yz)}{\partial z} - \frac{\partial(z^2+xy)}{\partial x}\right\}\boldsymbol{j} \\
&\quad + \left\{\frac{\partial(y^2+zx)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2+yz)}{\partial y}\right\} mbdk \\
&= (x-x)\boldsymbol{i} + (y+y)\boldsymbol{j} + (z+z)\boldsymbol{k} \\
&= (0,0,0).
\end{aligned}$$

問題 31 (1)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{f} &= \frac{\partial}{\partial x}(3xyz^2)+\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3)-\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz)\\ &= 3yz^2+6xy^2-x^2y\\ &= -3+6+1=4.\end{aligned}$$

問題 32 ベクトル図



問題 33 発散は，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\exp\left(-\frac{x^2}{10}\right)=0$$

問題 34 発散は，ある狭い領域に入ってくるフラックス (束) と出ていくフラックスの量の差である．今の場合，フラックスはベクトルである．今，x 方向に Δx，y 方向に Δy の領域を考える．問題のベクトル場 A は，y 方向にしか成分を持たないので，フラックスは，上下の長さ Δy の部分を通過する．ベクトルの y 成分は，上下において同じ大きさであるので，今考えている領域に入るフラックスと出るフラックスは同じと言えるので，発散は 0 である．

問題 35

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=\left(\frac{\partial r_z}{\partial y}-\frac{\partial r_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial r_x}{\partial z}-\frac{\partial r_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial r_y}{\partial x}-\frac{\partial r_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

に，$r_x=x$，$r_y=y$，$r_z=z$ を代入し，

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{r} &= \left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\ &= (0,0,0)\end{aligned}$$

を得る．

問題 36

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{f} &= \left\{\frac{\partial(yz^3)}{\partial y}-\frac{\partial(x^2y^2z)}{\partial z}\right\}\boldsymbol{i}+\left\{\frac{\partial(xyz)}{\partial z}-\frac{\partial(yz^3)}{\partial x}\right\}\boldsymbol{j}+\left\{\frac{\partial(x^2y^2z)}{\partial x}-\frac{\partial(xyz)}{\partial y}\right\}\boldsymbol{k}\\ &= \left(z^3-x^2y^2\right)\boldsymbol{i}+(xy)\,\boldsymbol{j}+\left(2xy^2z-xz\right)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

問題 37

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{f} &= \frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\\ &= \frac{\partial(x-y)}{\partial x}+\frac{\partial(y-z)}{\partial y}+\frac{\partial(z-x)}{\partial z}\\ &= 1+1+1=3.\\ \nabla\times\boldsymbol{f} &= \left\{\frac{\partial(z-x)}{\partial y}-\frac{\partial(y-z)}{\partial z}\right\}\boldsymbol{i}+\left\{\frac{\partial(x-y)}{\partial z}-\frac{\partial(z-x)}{\partial x}\right\}\boldsymbol{j}\\ &\quad+\left\{\frac{\partial(y-z)}{\partial x}-\frac{\partial(x-y)}{\partial y}\right\}\boldsymbol{k}\\ &= (0+1)\boldsymbol{i}+(0+1)\boldsymbol{j}+(0+1)\boldsymbol{k}\\ &= (1,1,1).\\ \nabla\cdot\boldsymbol{g} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+yz)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2+zx)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2+xy)\\ &= 2x+2y+2z\\ &= 2(x+y+z).\\ \nabla\times\boldsymbol{g} &= \left\{\frac{\partial(z^2+xy)}{\partial y}-\frac{\partial(y^2+zx)}{\partial z}\right\}\boldsymbol{i}+\left\{\frac{\partial(x^2+yz)}{\partial z}-\frac{\partial(z^2+xy)}{\partial x}\right\}\boldsymbol{j}\\ &\quad+\left\{\frac{\partial(y^2+zx)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2+yz)}{\partial y}\right\}\boldsymbol{k}\\ &= (x-x)\boldsymbol{i}+(y+y)\boldsymbol{j}+(z+z)\boldsymbol{k}\\ &= (0,0,0).\end{aligned}$$

問題 38 (1)

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\\ &= \frac{\partial(3x^2-yz)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(3x^2-yz)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(3x^2-yz)}{\partial z}\boldsymbol{k}\\ &= 6x\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{k}\\ &\quad (x,y,z)=(1,-1,1)\ \text{において，}\\ &= 6\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\\ &= (6,-1,1).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{f} &= \frac{\partial}{\partial x}(3xyz^2)+\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3)-\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz)\\ &= 3yz^2+6xy^2-x^2y\\ &= -3+6+1=4.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{f} &= \left\{\frac{\partial(-x^2yz)}{\partial y}-\frac{\partial(2xy^3)}{\partial z}\right\}\boldsymbol{i}+\left\{\frac{\partial(3xyz^2)}{\partial z}-\frac{\partial(-x^2yz)}{\partial x}\right\}\boldsymbol{j}+\left\{\frac{\partial(2xy^3)}{\partial x}-\frac{\partial(3xyz^2)}{\partial y}\right\}\\ &= (-x^2z-0)\boldsymbol{i}+(6xyz+2xyz)\boldsymbol{j}+(2y^3-3xz^2)\boldsymbol{k}\\ &= (-1,-8,-5).\end{aligned}$$

(4) (a) より，$\nabla\phi=(6x,-z,-y)$ であるから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}\cdot\nabla\phi &= 3xyz^2\cdot 6x+2xy^3\cdot(-z)+x^2yz\cdot y\\ &= 18x^2yz^2-2xy^3z+x^2y^2z\\ &= -18+2+1=-15.\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{f}) &= \phi\nabla\cdot\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}\cdot\nabla\phi\\ &\quad \text{更に (a), (b) より，}\\ &= (3x^2-yz)(3yz^2+6xy^2-x^2y)+(3xyz^2,2xy^3,-x^2yz)\cdot(6x,-z,-y)\\ &= 16-15=1.\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\nabla\times(\phi\boldsymbol{f}) &= \phi\nabla\times\boldsymbol{f}+\nabla\phi\times\boldsymbol{f}\\ &\quad \text{(a), (c) より，}\\ &= \left(3x^2-yz\right)(-1,-8,-5)+(6,-1,1)\times(-3,-2,1)\\ &= (-4,-32,-20)+(1,-9,-15)=(-3,-41,-35).\end{aligned}$$

(7) $\nabla^2\phi=\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla\cdot(6x,-z,-y)=\dfrac{\partial(6x)}{\partial x}+\dfrac{\partial(-z)}{\partial y}+\dfrac{\partial(-y)}{\partial z}=6.$

問題 39

$$\begin{aligned}&\nabla\times(\nabla\phi)\\ &= \nabla\times\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right\}\boldsymbol{i}+\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right\}\boldsymbol{j}+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right\}\boldsymbol{k}\\ &= 0.\end{aligned}$$

問題 40

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})\\ &= \nabla\cdot\left\{\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right\}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

問題 41

$$\nabla\phi=\frac{\partial}{\partial x}(xyz)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}(xyz)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}(xyz)\boldsymbol{k}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k},$$

であるから，

$$(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\phi=\boldsymbol{f}\cdot\nabla\phi=-y\times yz+x\times xz+z\times xy=-y^2z+x^2z+xyz$$

となる．したがって，$(1,1,1)$ においては，$(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\phi=-1+1+1=1$ である．

$f \cdot \nabla$ の右に g を掛けると，

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} \\
&= (-y)\frac{\partial}{\partial x}\left(3xyz^2\boldsymbol{i}+2xy^3\boldsymbol{j}-x^2yz\boldsymbol{k}\right)+(x)\frac{\partial}{\partial y}\left(3xyz^2\boldsymbol{i}+2xy^3\boldsymbol{j}-x^2yz\boldsymbol{k}\right) \\
&\quad +(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(3xyz^2\boldsymbol{i}+2xy^3\boldsymbol{j}-x^2yz\boldsymbol{k}\right) \\
&= (-y)\left(3yz^2\boldsymbol{i}+2y^3\boldsymbol{j}-2xyz\boldsymbol{k}\right)+(x)\left(3xz^2\boldsymbol{i}+6xy^2\boldsymbol{j}-x^2z\boldsymbol{k}\right)+(z)\left(6xyz\boldsymbol{i}-x^2yz\boldsymbol{k}\right) \\
&= \left(-3y^2z^2+3x^2x^2+6xyz^2\right)\boldsymbol{i}+\left(-2y^4+6x^2y^2\right)\boldsymbol{j}+\left(2xy^2z-x^3z-x^2yz\right)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

となる．したがって，$(1,1,1)$ においては，

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} &= (-3+3+6)\boldsymbol{i}+(-2+6)\boldsymbol{j}+(2-1-1)\boldsymbol{k} \\
&= 6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}=(6,4,0).
\end{aligned}
$$

となる．

問題 42 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(x,y,z,t)$ であるから，微分の定義によって，

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{f} &= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}dx+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}dy+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}dz+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}dt \\
&= dx\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}+dy\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}+dz\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}dt \\
&= (d\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}dt.
\end{aligned}
$$

問題 43 ∇ は微分演算子であるから，積の微分の法則を使って，

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{f})=\nabla_\phi\cdot(\phi\boldsymbol{f})+\nabla_{\boldsymbol{f}}\cdot(\phi\boldsymbol{f})$$

と書くことができる．

ここで，スカラー積 $\nabla_\phi\cdot(\phi\boldsymbol{f})$ は $\boldsymbol{f}$ を固定して，∇ を ϕ に作用させると考える．$\nabla\cdot\phi$ は定義されていないから，

$$\nabla_\phi\cdot(\phi\boldsymbol{f})=\boldsymbol{f}\cdot\nabla\phi,\qquad \nabla_{\boldsymbol{f}}\cdot(\phi\boldsymbol{f})=\phi\nabla\cdot\boldsymbol{f}.$$

これらの 2 方程式を加え合わせれば，

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{f})=\boldsymbol{f}\cdot\nabla\phi+\phi\cdot\nabla\boldsymbol{f}$$

となる．

別解）成分を使って考えると，

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{f}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_1)+\frac{\partial}{\partial y}(\phi f_2)+\frac{\partial}{\partial z}(\phi f_3) \\
&= \phi\frac{\partial f_1}{\partial x}+f_1\frac{\partial \phi}{\partial x}+\phi\frac{\partial f_2}{\partial y}+f_2\frac{\partial \phi}{\partial y}+\phi\frac{\partial f_3}{\partial z}+f_3\frac{\partial \phi}{\partial z} \\
&= \phi\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)+\left(f_1\frac{\partial \phi}{\partial x}+f_2\frac{\partial \phi}{\partial y}+f_3\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \\
&= \phi\nabla\cdot\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}\cdot\nabla\phi
\end{aligned}
$$

となる．

問題 44 $\nabla\times(\phi\boldsymbol{f})=\nabla_\phi\times(\phi\boldsymbol{f})+\nabla_{\boldsymbol{f}}\times(\phi\boldsymbol{f})$ で，$\nabla\times\phi$ は定義されていないから，

$$
\begin{aligned}
\nabla_\phi\times(\phi\boldsymbol{f}) &= (\nabla\phi)\times\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{f}\times\nabla\phi, \\
\nabla_{\boldsymbol{f}}\times(\phi\boldsymbol{f}) &= \phi\nabla\times\boldsymbol{f}.
\end{aligned}
$$

よって，これらを加え合わせれば，

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{f})=(\nabla\phi)\times\boldsymbol{f}+\phi\nabla\times\boldsymbol{f}=\phi\nabla\times\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}\times\nabla\phi$$

を得る．

問題 45 演算子はそれにつづくものについてのみ作用するから，$(\boldsymbol{f}\times\nabla)\phi$ は $\boldsymbol{f}$ と勾配 $\nabla\phi$ とのベクトル積と考えることができる．すなわち

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{f}\times\nabla)\phi &= \boldsymbol{f}\times(\nabla\phi) \\
&= \left(2z,x^2,x\right)\times\left(\frac{\partial(2x^2y^2z^2)}{\partial x},\frac{\partial(2x^2y^2z^2)}{\partial y},\frac{\partial(2x^2y^2z^2)}{\partial z}\right) \\
&= \left(2z,x^2,x\right)\times\left(4xy^2z^2,4x^2yz^2,4x^2y^2z\right) \\
&= (2,1,1)\times(4,-4,4) \\
&= (8,-4,-12).
\end{aligned}
$$

問題 46 $c\boldsymbol{f}=\nabla\phi$ から $\boldsymbol{f}$ の成分は，

$$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,f_3)=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{1}{c}\frac{\partial\ phi}{\partial z}\right),$$