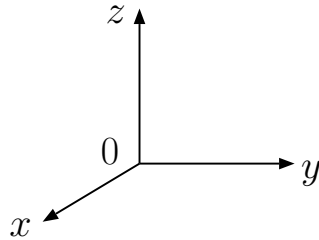


練習問題解答

問題 1 各々の座標軸の単位ベクトルがそれぞれ直交している座標系．カーテシアン座標系 (xyz の座標系，デカルト座標系とも言う) も 円柱座標系も極座標系もすべて直交座標系の一つ．

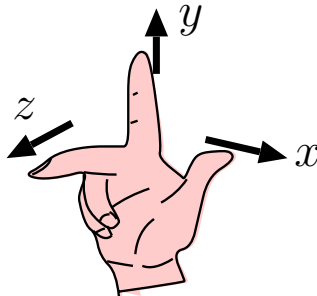
問題 2 一般に，図のように書く．座標軸と原点を書き入れること．また，座標軸には矢印をいれる．これは基本である．



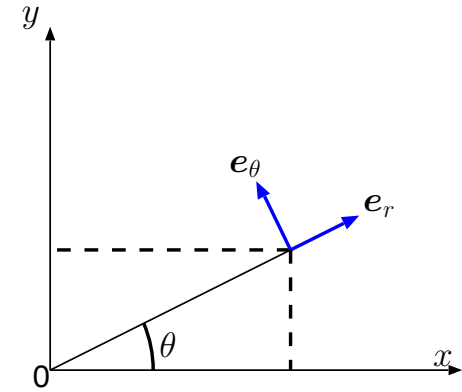
一般に座標系は右手系を使う．右手系とは，図のように右手の親指，人指し指，中指を直交させたとき，それぞれの向く方向が x, y, z 軸の向きとなる．それぞれの単位ベクトルを e_x, e_y, e_z としたときに，

$$e_x \times e_y = e_z$$

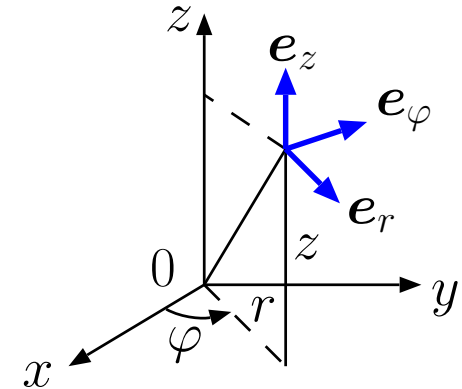
を満たす．



問題 3 平面の極座標． (r, θ)

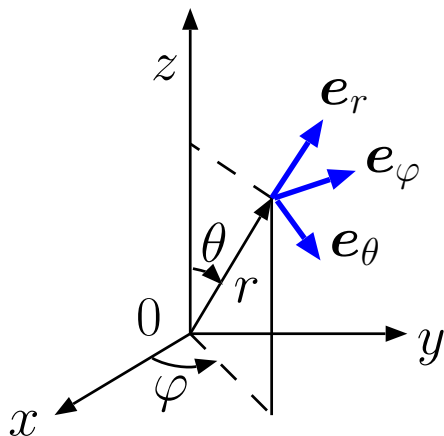


問題 4 φ 方向の単位ベクトル e_φ の方向に注意．



円柱座標も右手系をなす．つまり，座標は (r, ϕ, z) の順になっていて， $e_r \times e_\phi = e_z$ を満たしている．

問題 5 φ 方向の単位ベクトル e_φ の方向と θ 方向の単位ベクトル e_θ の方向に注意．



球座標も右手系をなす。つまり、座標は (r, θ, ϕ) の順になっていて、 $e_r \times e_\theta = e_\phi$ を満たしている。

問題 6 演算の結果がベクトルになることに注意する。

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} &= (a_x, a_y, a_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (b_x, b_y, b_z) \\ &= \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (b_x, b_y, b_z) \\ &= \left(a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z}, a_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_y}{\partial z}, a_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

∇ に関しては、一般のベクトルの交換則が成り立たないことに注意。つまり、

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \neq \nabla \cdot \mathbf{a}$$

である。 ∇ は微分演算子と呼ばれ、その直後の関数に作用するので、交換してはいけない。

問題 7 (1) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 2 + (-12) + 12 = 2$

$$(2) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$(3) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1 + 0 + 6 = 7$$

$$(4) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$(5) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 + 4 + 1 = 5$$

$$(6) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 + 0 + 2 = 5$$

$$(7) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 2 + 4 + 0 = 6$$

$$(8) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1 + 2 + 0 = 3$$

問題 8 $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ かつ $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ とおく。

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}},$$

より、

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = A^2 B^2 \cos^2 \theta \leq A^2 B^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2. \quad (0 \leq \cos^2 \theta \leq 1)$$

これを、スカラー積の定義で書き換えると、

$$(A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)^2 \leq (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)$$

問題 9 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$ より、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \\ &= \frac{2 + (-12) + 12}{\sqrt{4 + 16 + 36} \sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{56} \sqrt{14}} = \frac{1}{14}, \end{aligned}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{14} \right) = 1.499 \text{ [rad.]} = 85.9^\circ$$

問題 10 ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ とは直交するためには、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ であればよい。

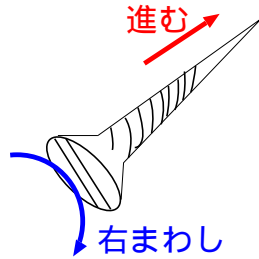
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 2 + 0 + (-2) = 0.$$

したがって、ベクトル $\mathbf{A} = (2, 3, -1)$ と $\mathbf{B} = (1, 0, 2)$ とは直交する。

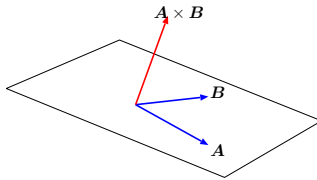
問題 11 (1) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (26, 2, -10)$ (2) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (3, -3, 1)$ (3) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (-4, -1, 2)$

(4) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (0, 0, 1)$ (5) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (0, 1, -2)$ (6) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (1, -1, -1)$

問題 12 ネジは普通右に回すと進んでいく。



問題 13 まず、図のような絵が思い浮かぶか？



$A \times B$ は A および B に垂直である。ゆえに、 A と B に垂直なベクトルは

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3i - 3j - 3k = (3, -3, -3)$$

であって、 $A \times B$ の大きさは、 $|A \times B| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ であるから、 A および B の両方に垂直な単位ベクトル u は

$$u = \frac{A \times B}{|A \times B|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(3, -3, -3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

また、向きが逆の $-u = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ も A および B に垂直な単位ベクトルである。

問題 14 $A = (A_x, A_y, A_z)$, $B = (B_x, B_y, B_z)$, $C = (C_x, C_y, C_z)$ とおく。

$B \times C = (B_y C_z - B_z C_y, B_z C_x - B_x C_z, B_x C_y - B_y C_x)$ であるから、

$$A \times (B \times C) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_y C_z - B_z C_y & B_z C_x - B_x C_z & B_x C_y - B_y C_x \end{vmatrix}$$

となる。この i 成分を求めて、次のように変形する。

$$\begin{aligned} & i \{ A_y (B_x C_y - B_y C_x) - A_z (B_z C_x - B_x C_z) \} \\ &= i \{ B_x (A_x C_x - A_y C_y - A_z C_z) - C_x (A_x B_x - A_y B_y - A_z B_z) \} \\ &= i B_x (A \cdot C) - i C_x (A \cdot B) \end{aligned}$$

他の成分についても同様にする。

問題 15 (1) 左辺について、 $B \times C = (0, 1, 1)$ となるから、 $A \times (B \times C) = (5, -1, 1)$
また、右辺について計算すると、 $(A \cdot C)B - (A \cdot B)C = 4(2, -1, 1) - (-3)(-1, 1, -1) = (8, -4, 4) - (3, -3, 3) = (5, -1, 1) =$ 左辺。

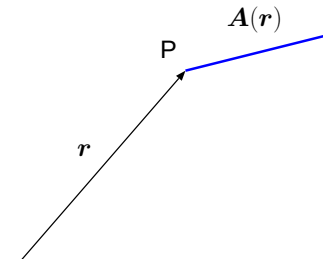
(2) 左辺について、 $A \times B = (-1, -7, -5)$ となるから、 $A \times (B \times C) = (12, 4, -8)$
また、右辺について計算すると、 $(A \cdot C)B - (B \cdot C)A = 4(2, -1, 1) - (-4)(1, 2, -3) = (8, -4, 4) - (-4, -8, 12) = (12, 4, -8) =$ 左辺。

問題 16 交換則を用いる。

$$(A \times B) \times C = -C \times (A \times B)$$

問題 17 ベクトルは、大きさと向きを持つ量。スカラーは、大きさだけを持った量。

問題 18 どのような図が分かりやすいかは、個人差があると思うが、一般的には図のように書くことが多い。



問題 19 $|a| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ だから、単位ベクトル e は、

$$e = \frac{a}{|a|} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$$

ここで、逆向きのベクトルも考えた。

問題 20 ベクトル三重積の公式に、 $A \rightarrow \nabla, B \rightarrow \nabla, C \rightarrow A$ として、代入する。

問題 21 勾配の定義式 (5) を用いれば、

$$\begin{aligned}\nabla(\phi\psi) &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi\psi)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\phi\psi)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\phi\psi)\mathbf{k} \\ &= \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial z} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\ &= \phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k}\right) + \psi\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\ &= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi.\end{aligned}$$

☞ 高校のときの積の関数の微分、 $(fg)' = fg' + f'g$ を思い出すとよい。

問題 22 与えられたスカラー関数に勾配の定義式 (5) を適用して、

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \frac{\partial(3x^2 - yz)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(3x^2 - yz)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(3x^2 - yz)}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= 6x\mathbf{i} - z\mathbf{j} - y\mathbf{k}\end{aligned}$$

これに、 $(x, y, z) = (1, -1, 1)$ を代入して、 $6\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} = (6, -1, 1)$ を得る。

問題 23

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\mathbf{i} + \frac{1}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\mathbf{j} + \frac{1}{2} \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\mathbf{k} \\ &= \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k} \\ &= \frac{(x, y, z)}{r} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.\end{aligned}$$

これは、位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の方向にある単位ベクトルを表す。

問題 24 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ とおくと、その微分ベクトルは、

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = (dx, dy, dz).$$

したがって、

$$\begin{aligned}\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = d\phi.\end{aligned}$$

☞ 全微分に関しては、43 ページ参照。

問題 25 $\phi = \phi(r) = r^n$ とおく。 $\nabla\phi = \nabla\phi(u) = \phi'(u)\nabla u$ および問題 23 で得た

$\nabla\phi = \nabla r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ の関係から、

$$\begin{aligned}\nabla(r^n) &= \frac{d}{dr}(r^n)\nabla r = nr^{n-1}\nabla r \\ &= nr^{n-2}\mathbf{r}.\end{aligned}$$

$n = -1$ とおけば、

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r}.$$

問題 26 これは、高校の復習でもある。ちゃんと 2 階微分までして、変極点を計算することができましたか？ 関数の $\exp$ の中の分母の $4(= 2^2)$ が何に対応しているか理解できましたか。

