13 電子プラズマ波

プラズマの常識 9

プラズマ中の最も重要な波は，電子プラズマ波である．ラングミュア波または，単にプラズマ波とも言う．電子プラズマ波は，電子密度の疎密の伝搬である．電荷密度の疎密は，電場を発生するので，電場の波とも言える．

電子プラズマ波の分散関係は，プラズマ振動を求めたところに，電子の熱運動 (圧力) を考慮することで，求められる．

圧力 p_e は，

$$\nabla p_e = 3k_BT_e\nabla n_e = 3k_BT_e\nabla(n_0+n_1) = 3k_BT_e\frac{\partial n_1}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}$$

で表される．これを運動方程式に代入し計算する．

プラズマの常識 10

電子プラズマ波の分散関係は，

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2}k^2v_{\rm th}^2$$

で表される．ここで，$v_{\rm th} = \sqrt{\dfrac{2k_BT_e}{m}}$ は，熱速度である．

問題 105 プラズマ中での電子密度の疎密が，プラズマ中に電場を発生させることを説明せよ．

問題 106 電子プラズマ波に伴う電場の波は，縦波か横波か．x 方向に伝搬する電子プラズマ波に伴う電場は，どのような式で書けるか．

問題 107 電子プラズマ波の位相速度の下限はいくらか．また，群速度の上限はいくらか．

問題 108 温度が十分低いと仮定できるとき，つまり，$T\approx 0$ のとき，電子プラズマ波の分散関係はどう表されるか．また，この分散関係を図示せよ．

問題 109 温度が十分に低いプラズマの電子プラズマ波の伝搬を考える．つまり，$T_e=0$ とする．プラズマの密度を $n_0 = 10^{16}{\rm cm}^{-3}$ とする．

(1) プラズマ波の位相速度が c(光速) であるとする．プラズマ波の波長は，いくらか．

(2) 電子プラズマ波の振幅が，定常状態のプラズマ密度の 10%(つまり，$10^{15}{\rm cm}^{-3}$ であるとする．) このとき，最大電場の値はいくらか．

問題 110 電子の密度分布が $n(x,t) = n_0 + n_1e^{i(kx-\omega t)}$ で表されている．

(1) n_0，n_1 は，何を表しているか．

(2) この分布の $t=0$ の時刻で図示せよ．

(3) この場合 x 方向には，電流が流れている．この電流密度 j_x を連続の式を用いて求めよ．

問題 111 デバイの長さが $\lambda_D = \left(\dfrac{\varepsilon_0 k_BT_e}{ne^2}\right)^{1/2}$ で表されることを思い出して，電子プラズマ波の分散関係を λ_D を用いて，

$$\omega^2 = \omega_p^2(1+3k^2\lambda_D^2)$$

で表されることを示せ．また，波長 λ が長いときには，

$$\omega = \omega_p\left(1+\frac{3}{2}k^2\lambda_D^2\right)$$

と近似することができることを示せ．

問題 112 電子の衝突周波数 ν を考慮することによって，電子プラズマ波の分散関係を求めたい．ただし，温度の効果を無視して良いものとする．つまり，$T_e=0$ として，運動方程式の右辺に，$-mn_0\nu v_1$ の項を加えよ．

(1) 運動方程式を書け．

(2) 分散関係が $\omega^2 + i\nu\omega = \omega_p^2$ となることを示せ．

(3) $\omega = \omega_r + i\omega_i$($i$ は，虚数単位) として，上で求めた分散関係式に代入し，ω の実部 ω_r と虚部 ω_i を求めよ．

(4) 電場 E_1 が

$$E_1 \propto e^{i\omega t}$$

で時間的に変化しているとする．ここに上で求めた ω を代入する．虚部の ω_i は，何を表すことになるか．

14　電磁波の伝搬

19 世紀末に Maxwell によって定式化された電磁場は，電磁波の存在を予言した．それは，ヘルツによって実験的に発見された．ここでは，Maxwell 方程式から電場 (または，磁場) を消去し，真空中の電磁波を表す波動方程式を導く．それにより，その波長と周波数の関係 (分散関係) を得る．

14.1　真空中を伝搬する電磁波の分散関係

用いる Maxwell 方程式は，

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{8}$$

である．今考えているのは真空中なので，透磁率，誘電率は，真空の値である．また，真空中であるので，電流を運ぶ電子などの電荷はないので $(\rho = 0)$，電流密度 $\boldsymbol{J}$ は，0 としている．

これらの式から，$\boldsymbol{E}$ または，$\boldsymbol{B}$ を消去する．式 (7) の両辺に $\nabla\times$ をかけて，

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

右辺の $\nabla \times \boldsymbol{B}$ に式の右辺を代入し，

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

を得る．左辺は，ベクトル公式

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

を用いて展開する．また，真空中なので電荷がないから，ポアソン方程式で $\rho = 0$ とすると，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

となり，

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

を得る．この偏微分方程式は，3 次元空間を伝搬する波動方程式の形をしている．

今，電場 $\boldsymbol{E}$ が，$\exp i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$ で変化しているとすると，

$$\nabla = ik, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

と書き換えられることを用いると，

$$-k^2 \boldsymbol{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \boldsymbol{E}$$

より，$c = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ を用いて，

$$\omega = ck$$

を得る．これを真空中の電磁波の分散関係と言う．この式は，高校の時に習った，波長と周波数の関係 $c = f\lambda$ を波数と (角) 周波数の関係に書き換えたものである．

14.2　プラズマ中を伝搬する電磁波

電磁波がプラズマ中を伝搬するとき，真空中とは異なりプラズマからの影響が少なからずあることは容易に想像できる．電磁波がプラズマ中を伝搬するとき，電磁波の電場を感じて電子が振動運動をする．その振動運動は電子電流 $\boldsymbol{J}$ を生む．この電流が電磁波の伝搬に影響する．

用いる Maxwell 方程式は，

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{10}$$

である．電場 $\boldsymbol{E}$ によって，電子は加速を受け，速度 $\boldsymbol{v}$ が発生する．電子の運動方程式は，

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\boldsymbol{E}$$

で表される．電場は，$e^{-i\omega t}$ で時間的に変化しているので，

$$\frac{d}{dt} = -i\omega$$

とすることにより，

$$\boldsymbol{v} = -\frac{e\boldsymbol{E}}{im\omega} = i\frac{e\boldsymbol{E}}{m\omega}$$

この速度により電流が発生する．電流密度の定義は，

$$\boldsymbol{J} = ne\boldsymbol{v} \tag{11}$$

である．ここで，n は，電子密度である．よって，

$$\boldsymbol{J} = i\frac{ne^2}{m\omega}\boldsymbol{E}$$

となる．これを式 (9) に代入し，

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = -i\mu_0\frac{ne^2}{m\omega}\boldsymbol{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

を得る．ここで，真空中での電磁波の分散関係を求めたのと同様に，この式に $\nabla\times$ をかけて

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = -i\mu_0\frac{ne^2}{m\omega}\nabla \times \boldsymbol{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \nabla \times \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$\nabla \times \boldsymbol{E}$ に $-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ を代入し，

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = i\mu_0\frac{ne^2}{m\omega}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}.$$

ベクトル公式 $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2\boldsymbol{B}$ を用いて，左辺を展開し，Maxwell の方程式 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ であることを用いると，

$$\nabla^2\boldsymbol{B} = i\mu_0\frac{ne^2}{m\omega}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}.$$

となる．ここで，$\nabla = ik,\ \dfrac{\partial}{\partial t} = -i\omega$ を用いると，

$$-k^2\boldsymbol{B} = \mu_0\frac{ne^2}{m}\boldsymbol{B} - \omega^2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{B}.$$

両辺 B で割って，$c^2 = \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ とプラズマ周波数 ω_p の式を用いると，

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \tag{12}$$

を得る．これをプラズマ中の電磁波の分散関係と言う．このグラフは，今までにも出てきた $y^2 = a^2 + b^2x^2$ の形であるから，その形は容易に想像できる．また，漸近線が $y = bx$ の形であることから，$\omega = ck$ が漸近線であることも理解できる．

以上では，電場 E を消去したが，もちろん，磁場 B を消去しても同様の結果が得られる．冗長になるが，ここでは磁場 B を消去した場合を導いておく．

Maxwell 方程式の一つ，

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

の両辺を $\nabla\times$ を取って，

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \boldsymbol{B})}{\partial t}$$

また，上の

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = -i\mu_0\frac{ne^2}{m\omega}\boldsymbol{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

と，ベクトル公式を用いると，

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\boldsymbol{E} = 0$$

を得る．電場は，横波であるので，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

である．よって，

$$\nabla^2\boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\boldsymbol{E} = 0 \tag{13}$$

を得る．ここで，

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

は，プラズマ誘電関数と呼ばれる．

電磁波のプラズマ中での屈折率を $\tilde{n}$ とする．屈折率 $\tilde{n}$ は，その定義から次式のように位相速度 v_{ph} と光速 c の比で表される．

$$\tilde{n} = \frac{c}{v_{ph}} = \frac{ck}{\omega}. \tag{14}$$

電磁波の分散関係より，

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{c^2k^2}{\omega^2}$$

よって，屈折率とプラズマ誘電関数との間には，

$$\tilde{n}^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \epsilon$$

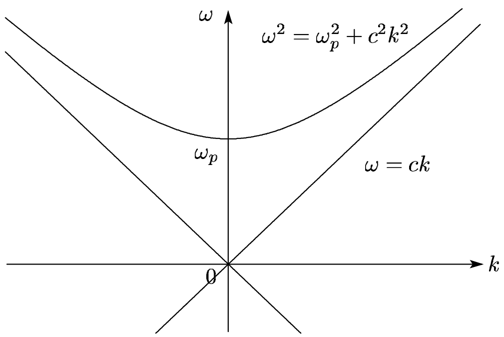

図 4: プラズマ中を伝搬する電磁波の分散関係．直線 $\omega = ck$ は，漸近線であると同時に，真空中を伝搬する電磁波の分散関係でもある．

なる関係がある．

電磁波の分散関係のグラフを見ると，ω が $0 < \omega < \omega_p$ の間には，グラフは存在しない．このことは，このプラズマ周波数のプラズマに対しては，この間の周波数の電磁波は存在しない．つまり，伝搬しないことを意味している．この領域 (範囲) を禁止帯と言うこともある．プラズマ周波数 ω_p は，プラズマ密度 n の関数になっているから，プラズマ密度が増えると (グラフで言えば，グラフが上方に移動する)，今まで伝搬が可能であった電磁波であっても，伝搬できなくなることがあることを意味している．電磁波が伝搬するかどうかは，電磁波の周波数とプラズマ周波数の大小が境界である．電磁波の周波数とプラズマ周波数が等しくなるときのプラズマ密度を臨界密度または，カットオフ密度と言い，

$$n_{\mathrm{cr}} = \frac{m\varepsilon_0}{e^2}\omega^2 \tag{15}$$

で表す．(密度 n の下付の cr は，「臨界」を意味する critical(クリティカル) から来ている．)

電磁波の周波数がプラズマ周波数より高いとき，そのプラズマを アンダーデンス・プラズマ (または，不足密度プラズマ，underdense plasma) と言い，プラズマ周波数より低いとき，オーバーデンス・プラズマ (または，過密度プラズマ overdense plasma) と言うことがある．

過密度プラズマでは，電磁波が伝搬しないことは，数学的には以下のように示すことが

できる．プラズマ中を伝搬する電磁波の分散関係

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$$

より，k について解くと，

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} = i\frac{1}{c}\sqrt{|\omega^2 - \omega_p^2|}$$

となる．$0 < \omega < \omega_p$ のとき，根号内は負になるので，k は虚数となる．つまり，実数の k は存在しないから，電磁波は伝搬できないと言える．

電場が空間的に $\exp(ikx)$ で変化しているとすると，

$$E \propto \exp(ikx) = \exp\left(-\frac{1}{c}\sqrt{|\omega^2 - \omega_p^2|} \cdot x\right)$$

となるから，過密度プラズマに入射した電磁波は指数関数的に減衰することになる．

減衰距離の目安となる特性距離は，$\exp(-x/\delta)$ としたときの δ である．よって，前式より，

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{|\omega^2 - \omega_p^2|}} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

で与えられる．

また，$\omega_p \gg \omega$ とすると，つまり，プラズマが十分過密度であるとすると，

$$\delta = \frac{c}{\omega_p}$$

となる．以上のことから，非常に密度が高いプラズマに電磁波が入射すると，つまり，$\omega_p \gg \omega$ が成り立つと，電磁波の影響は $\delta = \dfrac{c}{\omega_p}$ 程度の距離しか及ばないことになる．この特性距離 δ を，表皮の深さ (skin depth) と言う．

問題 113 携帯電話の周波数は，約 1 GHz である．このとき，波長はいくらか．また，この波長から，携帯電話のアンテナは，波長のどれくらいになっているか．

問題 114 真空中の電磁波の分散関係が，波長と周波数の関係 $c = f\lambda$ と等価であることを示せ．

問題 115 (意味のない問題) 真空の誘電率と透磁率は，それぞれ $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ と $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ である．これらを，$c = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ に代入することにより，光速 c を計算せよ．なぜ，この問題が意味のない問題なのか説明せよ．

問題 116 真空中の電磁波の分散関係のグラフを書け．そのグラフより，電磁波が真空中を伝搬するときの位相速度 v_p 及び群速度 v_g を求めよ．

問題 117 電磁波がプラズマで反射される現象の例を挙げよ．電磁波のエネルギーがプラズマ、または物質に与えられることを示す現象を挙げよ．

問題 118 臨界密度 $n_{\rm cr}$ が式 (15) で表されることを示せ．

問題 119 中波や短波の放送は、遠方の放送局であっても聞くことができる．しかし、遠くのテレビや FM が聞こえることはほとんどない．電離層のプラズマ密度がいくらぐらいであると言えるか．概算せよ．中波の代表的な周波数として、900 kHz、FM の代表的な周波数として、90 MHz とせよ．

問題 120 宇宙船が地球に帰ってくるとき，大気圏に突入する．このとき，地上との通信ができなくなる．この理由を考えよ．また，大気圏突入時でも通信ができるようにするには，どうしたらよいか考えよ．

問題 121 流星群が観測されるとき，通常では聞くことのできない遠くの FM 放送が数秒間から数十秒間聞くことができる (流星電波観測と呼ばれている)．これは，流星群が大気圏に突入したときにできるプラズマによって FM 放送の電波が反射したことによる．このことから，流星によってどのくらいの密度のプラズマができていると考えられるか．FM 放送の周波数を 90 MHz として，計算せよ．

問題 122 周期的に変化する電場 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}e^{-i\omega t}$ によって，電子電流は，式 (11) で表される．この式で，虚数 i が入っているのは，何を意味しているか．

問題 123 以下の問いに答えよ．

(1) 周波数 9 GHz の電磁波の真空中での波長は，いくらか．
(2) 周波数 9 GHz の電磁波が，プラズマ密度 $9 \times 10^{17}\ \mathrm{m}^{-3}$ の中を伝搬している．波長はいくらか．また，そのときの位相速度と群速度を求めよ．
(3) 周波数 9 GHz の電磁波が伝搬できるプラズマ密度の範囲を求めよ．

問題 124 以下の問に答えよ．

(1) 周波数が $0 < \omega < \omega_p$ の電磁波が伝搬できないことを，プラズマ中の電磁波の分散関係から求めよ．
(2) 電磁波が x 方向に伝搬し，電場強度が空間的に e^{ikx} で変化しているとする．これに前の問で求めた k を代入すると，電磁波の電場はどのように変化するか．
(3) 電場の減衰の特性距離 (減衰の目安になる距離) を求めよ．
(4) $\omega_p \gg \omega$ のとき，特性距離はどうなるか．

問題 125 プラズマ中を伝搬する電磁波の波数と位相速度の関係を示すグラフ (横軸 k，縦軸 $v_{\rm ph}$) 及び電磁波の波数と群速度のグラフ (横軸 k，縦軸 $v_{\rm g}$) を書け．