

電磁気学 II とプラズマ工学 に必要な数学

2005 年度版
宇都宮大学工学部
電気電子工学科

学籍番号

氏名

はじめに

この冊子は、電磁気学、特に電磁気学 II とプラズマ工学に必要な数学の知識をまとめたものである。

ほぼすべての項目が、左右の 2 ページで構成されており、即座に内容が理解できるようにした。これで最低限のことが分かると思う。すべてに例題と数問の練習問題を与え、解答も可能な限り詳しく書いた。

この冊子は、詳しく理解するためのものではない。ちょっと忘れたことをすぐに思い出すためのものである。また、数学が電磁気学でどのように使われるかに考慮して書いたつもりである。

この冊子に書かれていることが理解できれば電磁気学が理解できたと勘違いしないでほしい。ここに書かれていることは最低限である。最近、その最低限も理解できない学生が増えてきたので、この冊子にまとめただけである。

この冊子を書いたからと言って、講義のときに全く説明しないようなことはしません。講義ではいつもどおり必要な数学の説明を行います。この冊子はそのときのアシスタント的な役割をするだけです。また、講義の時に気の効いた例題が思い出せないときにこの冊子は重宝すると思っております。

間違いを見つけた場合や、こうした方がいいんじゃないかといった提案があれば、yugami@cc.utsunomiya-u.ac.jp までメールしてください。

2005 年 4 月
宇都宮大学 湯上 登

目次

1	電磁気学に必要な数学対照表	1
2	公式集	5
2.1	座標系	5
2.2	ベクトル公式	6
2.3	マクスウェル方程式	6
2.4	その他の公式	6
3	ベクトルの内積の計算	9
4	ベクトルの外積の計算	11
5	ベクトルとナブラ	13
6	ベクトルの勾配計算	15
7	ベクトルの発散の計算	17
8	ベクトルの回転の計算	19
9	曲面	21
10	積分の原理	23
11	線積分の計算	25
12	面積分の計算	27
13	体積分の計算	29
14	ベクトルの線積分の計算	31
15	ベクトルの面積分の計算	33

16	ガウスの定理	35
17	ストークスの定理	37
18	線形 1 階微分方程式の計算	39
19	線形 2 階微分方程式の計算	41
20	偏微分と全微分	43
21	近似式	45
22	複素数とオイラーの式	47
23	偏微分方程式の計算	49

1 電磁気学に必要な数学対照表

現在の教科書 (培風館「工科の物理 3 電磁気学」渡辺征夫, 青柳 晃著) の単元とそこで必要となる数学の知識の対照表

1 電荷と電界		
1.1	電荷	
1.2	クーロンの法則	ベクトルの和
1.3	電界の定義	面積分, 線積分, 体積分, 極座標
1.4	電気力線	ベクトルの面積分, 一階線形微分方程式
1.5	ガウスの法則	ガウスの定理, ベクトルの面積分, 立体角, ベクトルの内積
1.6	電界の発散	ベクトルの面積分, ベクトルの発散, ガウスの定理
2 電位		
2.1	電位の定義	ベクトルの線積分, ベクトルの面積分, 体積分
2.2	電位の勾配	ベクトルの線積分, 偏微分, ベクトルの勾配
2.3	電界の回転	ベクトルの線積分, テーラー展開, ベクトルの面積分, ストークスの定理, ベクトルの回転
2.4	ポアソン方程式とラプラスの方程式	偏微分方程式, ポアソン方程式, ラプラスの方程式, ベクトル演算子
2.5	導体系の電荷と電位	ベクトルの面積分, ラプラスの方程式, 行列
2.6	静電容量	
2.7	導体系の静電エネルギー	ベクトルの線積分, 体積分
2.8	静電エネルギーと静電気力	面積分, 偏微分
3 誘電体		
3.1	電気分極	ベクトルの面積分
3.2	分極電荷	ベクトルの面積分, ガウスの定理, ベクトルの発散
3.3	誘電体中の電界	

3.4	電束密度とガウスの法則	ベクトルの面積分, ガウスの法則, 体積分, ベクトルの発散
3.5	誘電体の境界条件	ベクトルの線積分, ベクトルの面積分, 体積分
3.6	誘電体に蓄えられるエネルギー	体積分
3.7	誘電体境界面に働く力	線形一階微分方程式
3.8	電気映像法	面積分
4 電流		
4.1	電流と電気抵抗	
4.2	電流密度	ベクトルの面積分, ガウスの定理, ベクトルの発散
4.3	電気伝導モデル	線形 1 階微分方程式
4.4	電源と起電力	ベクトルの線積分
4.5	電気回路と電力	ベクトルの線積分, 線形 1 階微分方程式
4.6	定常電流界と静電界	ベクトルの線積分, ベクトルの面積分
5 電流と磁界		
5.1	磁気力	
5.2	ビオサバールの法則	ベクトルの外積, ベクトルの線積分, ベクトルの発散, ベクトルの勾配
5.3	磁束密度に関するガウスの法則	ベクトルの面積分, ガウスの法則
5.4	アンペアの周回積分の法則	ベクトルの線積分, ストークスの定理, ベクトルの回転
5.5	磁位	極座標, 近似式 (テーラー展開), ベクトルの線積分, ベクトルの勾配
5.6	ベクトルポテンシャル	ポアソン方程式の一般解, ベクトルの面積分, ベクトルの回転, ベクトルの発散, 体積分
5.7	磁界中の電流に働く力	ベクトルの外積, ベクトルの線積分, 線形 1 階微分方程式

6	磁性体	
6.1	磁化	
6.2	磁化電流	ベクトルの外積，ストークスの定理，ベクトルの回転
6.3	磁性体中の磁界の強さ	ベクトルの線積分
6.4	磁性体の境界条件	ガウスの定理，ストークスの定理，ベクトルの面積分，ベクトルの線積分
6.5	強磁性体の磁化	
6.6	磁極の強さと自己減磁界	ガウスの法則
6.7	磁気に関するクーロン力	ベクトルの線積分
6.8	磁気回路	ベクトルの線積分，ベクトルの面積分
7	電磁誘導	
7.1	電磁誘導の法則	ベクトルの面積分，ベクトルの線積分，ストークスの定理
7.2	変圧器起電力と速度起電力	ベクトルの面積分，ベクトルの線積分，テラー展開，ベクトルの回転
7.3	インダクタンス	線形 1 階微分方程式，ベクトルの線積分
7.4	各種コイルのインダクタンス	ベクトルの線積分，ベクトルの面積分，多重積分
7.5	磁界のエネルギーと起電力	ベクトルの線積分，ベクトルの面積分，多重積分，体積分
7.6	渦電流損失とヒステリシス損失	
7.7	表皮効果	偏微分方程式，拡散方程式
8	電磁界を表す方程式	
8.1	変位電流	ベクトルの線積分，ベクトルの回転，ベクトルの発散
8.2	マックスウェルの方程式	偏微分方程式，波動方程式
8.3	電磁波に対する波動方程式	偏微分方程式，波動方程式

8.4	電磁波の伝搬	
8.5	正弦的に変動する電磁波	
8.6	ポインティングの定理	体積分，ベクトルの面積分

2 公式集

2.1 座標系

カーテシアン座標系 (x, y, z)

- $\text{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$
- $\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- $\text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$

円柱 (円筒) 座標系 (r, φ, z) $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z}$ は, 単位ベクトル

- $\text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$
- $\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- $\text{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\hat{z}$
- $\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

球座標 (r, θ, φ) $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ は, 単位ベクトル

- $\text{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$
- $\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
- $\text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}rA_\varphi\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\varphi}$
- $\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$

2.2 ベクトル公式

- (1) $\nabla(\phi\varphi) = \phi\nabla\varphi + \varphi\nabla\phi$
- (2) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = \phi\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla\phi$
- (3) $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = \nabla\phi \times \mathbf{A} + \phi\nabla \times \mathbf{A}$
- (4) $\nabla(\nabla\phi) = 0$
- (5) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ ⇨ ベクトルポテンシャル (電磁気 II)
- (6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}$
- (7) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ ⇨ ベクトル三重積
- (8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
- (9) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
- (10) $\nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi$ ⇨ ラプラス方程式 (電磁気 I)
- (11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ ⇨ 波動方程式 (電磁波:電磁気 III)

2.3 マクスウェル方程式

- $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$
- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
- $\nabla \times \mathbf{B} = \mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

2.4 その他の公式

- $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ローレンツ力
- $d\mathbf{B} = \frac{\mu i}{4\pi r^3} d\ell \times \mathbf{r}$ ビオ・サバールの法則
- $\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ 連続の式
- $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ベクトルポテンシャル
- $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 電位 (静電ポテンシャル)
- $\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi$

- $i = \frac{dq}{dt}$
- $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$

電流の定義

流体微分 (ラグランジェ微分)

練習問題

問題 1 直交座標系とは、どのような座標系か説明せよ。

問題 2 三次元のカーテシアン (デカルト) 座標系を書け。

問題 3 極座標系の任意の点で、各方向の単位ベクトルの方向を図示せよ。

問題 4 円柱座標系の任意の点で、各方向の単位ベクトルの方向を図示せよ。

問題 5 球座標系の任意の点で、各方向の単位ベクトルの方向を図示せよ。

問題 6 二つのベクトル $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ がある。このとき、演算 $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$ を成分で計算せよ。

【用語】 直交座標系，カーテシアン座標系，デカルト座標系，円柱 (円筒) 座標系，球座標系，極座標系，右手系

重要ポイント

- x, y, z 方向の単位ベクトルを， i, j, k で表すことが多い。
- x, y, z 方向の単位ベクトルを， e_x, e_y, e_z で表すこともある。
- 単位ベクトルを “ $\hat{}$ ” で表すこともある。
- 日頃から、ベクトルとスカラーを意識せよ。
- どんな問題でも自分で図を書け。
- 図を書くときは、(1) 原点，(2) 軸名，(3) 軸の矢印 を必ず書く。

練習問題

3 ベクトルの内積の計算

■ 基本事項 ベクトル $a = (a_x, a_y, a_z)$ とベクトル $b = (b_x, b_y, b_z)$ に対する次式で定義される計算を内積またはスカラー積と言い、 $a \cdot b$ または (a, b) で表す。計算結果はスカラーとなる。

$$a \cdot b = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |a||b| \cos \theta \quad (1)$$

ここで、 θ は、ベクトル a とベクトル b のなす角を表す。

内積の図形的意味は、図 1 に示すように、ベクトル a をベクトル b に射影した長さとベクトル b の大きさ (長さ) の積で表される。特に、 $\theta = 0$ のとき (a と b が平行のとき)、 $a \cdot b = ab$ であり、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき (a と b が直交するとき)、 $a \cdot b = 0$ である。

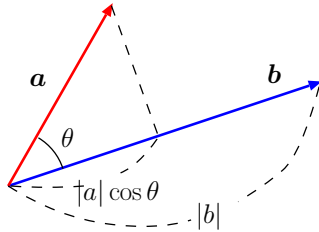


図 1: ベクトルの内積

例題

次のベクトル A, B のスカラー積 $A \cdot B$ を計算せよ。

(1) $A = (2, 1, 1), B = (0, 1, 3)$ (2) $A = (1, 1, 1), B = (-1, 2, 1)$

■ 解 内積は、定義式 (1) より

(1) $A \cdot B = 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 3 = 0 + 1 + 3 = 4$

(2) $A \cdot B = 1 \times (-1) + 1 \times 2 + 1 \times 1 = -1 + 2 + 1 = 2$

問題 7 次のベクトル A, B のスカラー積 $A \cdot B$ を計算せよ。

(1) $A = (2, 4, 6), B = (1, -3, 2)$ (2) $A = (1, 1, 0), B = (0, 1, 3)$

(3) $A = (1, 0, 2), B = (1, 2, 3)$ (4) $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0)$

(5) $A = (0, 2, 1), B = (1, 2, 1)$ (6) $A = (3, 1, 2), B = (1, 0, 1)$

(7) $A = (2, 2, 1), B = (1, 2, 0)$ (8) $A = (1, 1, 0), B = (1, 2, 3)$

問題 8 次の不等式を証明せよ。

$$(A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)^2 \leq (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)$$

問題 9 ベクトル $A = (2, 4, 6)$ と $B = (1, -3, 2)$ が作る角 θ を求めよ。

問題 10 ベクトル $A = (2, 3, -1)$ と $B = (1, 0, 2)$ とは直交することを証明せよ。

【用語】 内積, スカラー積

重要ポイント

- 内積は、 $|a||b| \cos \theta$ 。
- ベクトルが平行なときは、内積は二つのベクトルの大きさの積。
- ベクトルが垂直なときは、内積は 0。

4 ベクトルの外積の計算

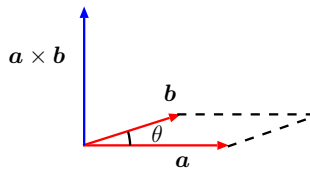
■ 基本事項 ベクトル $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ とベクトル $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ に対する次式で定義される計算を外積またはベクトル積と言います。 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ で表す。計算結果はベクトルとなる。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x, a_y, a_z) \times (b_x, b_y, b_z) = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \quad (2)$$

行列式形式で式 (2) を書くと、次式となる。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (3)$$

外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の図形的意味は、図 4 に示すように、ベクトル $\mathbf{a}$ からベクトル $\mathbf{b}$ に右ネジを回したときネジの進む向きで、その大きさは、ベクトル $\mathbf{a}$ とベクトル $\mathbf{b}$ がつくる平行四辺形の面積の大きさ $(ab \sin \theta)$ となる。特に、 $\theta = 0$ のとき ($\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行のとき)、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ であり、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき ($\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が直交するとき)、 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab$ である。外積ベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方と垂直である。



例題 1

次のベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ のベクトル積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。

$$(1) \mathbf{A} = (2, 1, 1), \mathbf{B} = (0, 1, 3) \quad (2) \mathbf{A} = (1, 1, 1), \mathbf{B} = (-1, 2, 1)$$

解 外積は、定義式 (2) より

$$(1) \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2, 1, 1) \times (0, 1, 3) = (2, -6, 2).$$

$$(2) \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (1, 1, 1) \times (-1, 2, 1) = (-1, -2, 3).$$

問題 11 次のベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ のベクトル積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。

$$(1) \mathbf{A} = (2, 4, 6), \mathbf{B} = (1, -3, 2) \quad (2) \mathbf{A} = (1, 1, 0), \mathbf{B} = (0, 1, 3)$$

$$(3) \mathbf{A} = (1, 0, 2), \mathbf{B} = (1, 2, 3) \quad (4) \mathbf{A} = (1, 0, 0), \mathbf{B} = (0, 1, 0)$$

$$(5) \mathbf{A} = (0, 2, 1), \mathbf{B} = (1, 2, 1) \quad (6) \mathbf{A} = (3, 1, 2), \mathbf{B} = (1, 0, 1)$$

問題 12 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の向きは、 $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ へ右ネジを回す向きであると表現される。この様子を図で示せ。

問題 13 $\mathbf{A} = (2, 1, 1)$ および $\mathbf{B} = (1, -1, 2)$ がある。この平面の単位法線ベクトルを求めよ。

問題 14 成分を用いて、次のベクトル三重積の式を証明せよ。

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

問題 15 $\mathbf{A} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{B} = (2, -1, 1)$ および $\mathbf{C} = (-1, 1, -1)$ とする。

(a) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ を計算し、問題 14 の公式を証明せよ。

(b) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ を計算し、次式を証明せよ。

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$$

問題 16 問題 14 の公式を変形することにより、次式を導け。

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$$

【用語】 外積, ベクトル積

重要ポイント

- 外積の計算結果は、ベクトル。
- ベクトルが平行なときは、外積は 0。
- 外積の大きさは $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ ($\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が作る平行四辺形の面積)、向きは、右ネジの進む向き。
- 平面上の平行でない 2 つのベクトルの外積計算によって法線ベクトルが計算できる。

5 ベクトルとナブラ

■ 基本事項 大きさと向きを持った量をベクトルという．大きさだけの量をスカラーという．

■ 基本事項 任意の点 (始点) からある点 (終点) までのベクトルを位置ベクトルという．一般には，始点を原点に取ることが多い．

■ 基本事項 大きさが 1 のベクトルを単位ベクトルという．

■ 基本事項 空間の点 (x, y, z) について考えたスカラー関数 $\phi(x, y, z)$ 全体をスカラー場という．空間の点 (x, y, z) について考えたベクトル関数 $f(x, y, z)$ 全体をベクトル場という．

■ 基本事項 ベクトルの微分には， ∇ (ナブラ) を用いて表現することがある．ナブラは，微分演算子 (びぶんえんざんし) または微分オペレーター と呼ばれる．ラプラス変換でできた s も微分演算子ということができる．カーテシアン座標系では，

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4)$$

で表されるベクトルである．

例題

$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ としたとき，次の計算を行え．

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

■ 解 成分で計算する．

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \left[(u_x, u_y, u_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (u_x, u_y, u_z) \\ &= \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (u_x, u_y, u_z) \\ &= \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}, u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}, u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

☞ 交換してはいけない． $\mathbf{u} \cdot \nabla \neq \nabla \cdot \mathbf{u}$

☞ この式は，流体方程式に用いられる (プラズマ工学) ．

問題 17 ベクトルとは何か，スカラーとは何か．

問題 18 位置ベクトル $\mathbf{r}$ で与えられるある点 P でのベクトル場が $A(\mathbf{r})$ で与えられている．この様子を示す図を書け．

問題 19 ベクトル $\mathbf{a} = (2, 1, 0)$ に平行な単位ベクトルを求めよ．

問題 20 ベクトル三重積の公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

を用いて

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

を示せ．

☞ この式は，マクスウェル方程式から電磁波の波動方程式を導くときに用いられる (電磁気 III) ．88 ページ，問題 88 参照．

【用語】 ベクトル，スカラー，位置ベクトル，始点，終点，ナブラ，微分演算子，微分オペレーター

重要ポイント

- ベクトルは，大きさと向きを持つ量．
- スカラーは，大きさだけを持った量．
- ナブラは，偏微分を成分としたベクトルである．
- ナブラは，直後の関数に作用する．

6 ベクトルの勾配計算

■ 基本事項 カートesian座標系で定義されたスカラー関数 $\phi(x, y, z)$ に対して、次の演算の結果を勾配またはグラディエントといい、 $\nabla\phi$ または、 $\text{grad } \phi$ で表す。

$$\nabla\phi = \text{grad } \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} \quad (5)$$

また、勾配には次の性質がある。

$$\nabla(c\phi) = c\nabla\phi \quad (6)$$

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi \quad (7)$$

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \quad (8)$$

ここで、 ϕ と ψ は、スカラー関数であり、 c は、定数である。

例題

関数 $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ において、点 P(1, 1, 0), Q(2, 1, 1) の勾配ベクトルを求めよ。

■ 解 関数の勾配は、定義より

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \end{aligned}$$

これに、(1, 1, 0), (2, 1, 1) を代入して、P での勾配 (2, 2, 0), Q での勾配 (4, 2, 2) を得る。

☞ 偏微分の計算は、43 ページ参照。

問題 21 式 (8) を証明せよ。

問題 22 スカラー関数 ϕ が $\phi = 3x^2 - yz$ で定義されている。このとき (1, -1, 1) において $\nabla\phi$ を求めよ。

問題 23 $\phi = r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ のとき、 $\nabla\phi$ を求めよ。

問題 24 $\phi = \phi(x, y, z)$ とする。このとき $\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = d\phi$ を示せ。

問題 25 $r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ とする。 n を任意の実数としたとき、 $\nabla(r^n), \nabla(1/r)$ を求めよ。

問題 26 関数 $y = 10 \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$ のグラフを描きなさい。

問題 27 関数 $z = 10 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4}\right)$ のグラフを描きなさい。描けなくても、どのような感じになるか絵で示しなさい。

問題 28 関数 $z = 10 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4}\right)$ の z の値を山の高さに見立てて、その等高線図を xy 平面に描きなさい。 z の値が、2, 4, 6, 8 の線を描きなさい。

問題 29 関数 $z = 10 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4}\right)$ において、格子点 (x 座標と y 座標の両方が整数の点) の勾配を計算し、そのベクトル図を上で描いた等高線のグラフに重ねて描きなさい。勾配ベクトルと等高線の関係はどうなっているか考えなさい。

【用語】 勾配、グラディエント、grad

重要ポイント

- 勾配の計算結果は、ベクトル。

7 ベクトルの発散の計算

■ 基本事項 発散 (divergence : ダイバージェンス) は、湧き出しとも呼ばれる。発散の定義は、

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (9)$$

で与えられる。特にカーテシアン座標系では次式で計算することができる。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (10)$$

2次元の場合は、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \quad (11)$$

勾配 (grad) や回転 (rot) の計算結果がベクトルになるのに対して、発散はスカラーとなる。

例題

次のベクトルの発散を計算しなさい。

- (1) $\mathbf{A} = xyz\mathbf{i} + x^2y^2z\mathbf{j} + yz^3\mathbf{k}$
- (2) $\mathbf{A} = 2x^2z\mathbf{i} - xy^2z\mathbf{j} + 3yz^3\mathbf{k}$
- (3) $\mathbf{A} = 3x^2y\mathbf{i} - 2y^3z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$

■ 解 発散の式 (10) を用いて、

- (1) $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial(xyz)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y^2z)}{\partial y} + \frac{\partial(yz^3)}{\partial z} = yz + 2x^2yz + 3yz^2$
- (2) $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial(2x^2z)}{\partial x} + \frac{\partial(-xy^2z)}{\partial y} + \frac{\partial(3yz^3)}{\partial z} = 4xz - 2xyz + 6yz$
- (3) $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial(3x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial(-2y^3z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xy^2z)}{\partial z} = 6xy - 6y^2z^2 + xy^2$

問題 30 $\mathbf{f} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$ および $\mathbf{g} = (x^2+yz)\mathbf{i} + (y^2+zx)\mathbf{j} + (z^2+xy)\mathbf{k}$ に対し、 $\nabla \cdot \mathbf{f}$, $\nabla \cdot \mathbf{g}$ を求めよ。

問題 31 $\mathbf{f} = 3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}$ とする。このとき $(1, -1, 1)$ において $\nabla \cdot \mathbf{f}$ を求めよ。

問題 32 次のベクトル場のベクトル図を x - y 平面上の $(0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5)$ の格子点について描け。

$$\mathbf{A} = 0 \cdot \mathbf{i} + \exp\left(-\frac{x^2}{10}\right)\mathbf{j}$$

ここで、 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ は、それぞれ x 方向、 y 方向の単位ベクトルである。

問題 33 問題 32 のベクトル場 $\mathbf{A}$ について、発散を計算せよ。

問題 34 問題 32 のベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散を計算せずに (発散の図形的性質を考えて) 求め、その結果が問題 33 での結果と同じであることを確認せよ。

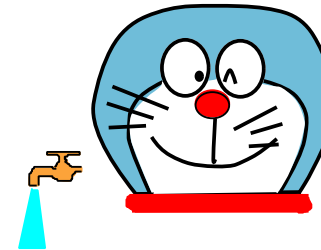


図 2: ドラえもん「どこでもじゃ口」は、ダイバージェンスが 0 ではない。

【用語】 発散, ダイバージェンス, 湧き出し, 湧出, div

重要ポイント

- 発散の計算結果は、スカラー。

8 ベクトルの回転の計算

■ 基本事項 ベクトルの回転 (rotation) の定義は,

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = n_{\max.} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (12)$$

で与えられる. ここで, $n_{\max.}$ は, ΔS の面が

$$\frac{1}{\Delta S} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

の最大値を与えるように, ΔS に付帯させた単位法線ベクトルである.

特にカーテシアン座標系では次式で計算することができる.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (13)$$

勾配 (grad) の結果と同様, 計算結果はベクトルになる.

例題

次のベクトルの回転を計算しなさい.

- (1) $\mathbf{A} = xyz\mathbf{i} + x^2y^2z\mathbf{j} + yz^3\mathbf{k}$
- (2) $\mathbf{A} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$

■ 解

- (1) $\nabla \times \mathbf{A} = (z^3 - x^2y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (2xy^2z - xz)\mathbf{k}$
- (2) $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

問題 35 位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ に対して, $\nabla \times \mathbf{r}$ を計算せよ.

問題 36 ベクトル $\mathbf{f} = (xyz, x^2y^2z, yz^3)$ に対して, $\nabla \times \mathbf{f}$ を計算せよ.

問題 37 $\mathbf{f} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$ および $\mathbf{g} = (x^2+yz)\mathbf{i} + (y^2+zx)\mathbf{j} + (z^2+xy)\mathbf{k}$ に対し, $\nabla \cdot \mathbf{f}$, $\nabla \times \mathbf{f}$, $\nabla \cdot \mathbf{g}$, $\nabla \times \mathbf{g}$ を求めよ.

問題 38 $\phi = 3x^2 - yz$, $\mathbf{f} = 3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}$ とする. このとき $(1, -1, 1)$ において

(a) $\nabla \phi$, (b) $\nabla \cdot \mathbf{f}$, (c) $\nabla \times \mathbf{f}$, (d) $\mathbf{f} \cdot \nabla \phi$, (e) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{f})$, (f) $\nabla \times (\phi \mathbf{f})$, (g) $\nabla^2 \phi$ を求めよ.

問題 39 スカラー関数 ϕ に対し, $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ を示せ.

問題 40 ベクトル $\mathbf{f}$ に対し, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$ を示せ.

問題 41 $\mathbf{f} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{g} = 3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}$ かつ $\phi = xyz$ に対して, 点 $(1, 1, 1)$ における $(\mathbf{f} \cdot \nabla)\phi$ と $(\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}$ を求めよ.

問題 42 $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z, t)$ である. 次式を示せ. ただし $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ である.

$$d\mathbf{f} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} dt$$

問題 43 $\nabla \cdot (\phi \mathbf{f}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \nabla \phi$ を示せ.

問題 44 $\nabla \times (\phi \mathbf{f}) = \phi \nabla \times \mathbf{f} + (\nabla \phi) \times \mathbf{f} = \phi \nabla \times \mathbf{f} - \mathbf{f} \times \nabla \phi$ を示せ.

問題 45 $\mathbf{f} = (2z, x^2, x)$, $\phi = 2x^2y^2z^2$ である. 点 $(1, -1, 1)$ における $(\mathbf{f} \times \nabla)\phi$ を求めよ.

問題 46 c を定数とし $c\mathbf{f} = \nabla \phi$ とする. このとき $\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = 0$ を示せ.

【用語】 回転, ローテーション, rot

重要ポイント

- 回転の計算結果は, ベクトル.

9 曲面

■ 基本事項 空間曲線への位置ベクトルは、パラメーター t を用いて、

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (14)$$

と表すことができる。一方、曲面上の点への位置ベクトルは、パラメーター s, t を用いて、

$$\mathbf{r}(s, t) = x(s, t)\mathbf{i} + y(s, t)\mathbf{j} + z(s, t)\mathbf{k} \quad (15)$$

と表すことができる。

例題

次に示される曲面をパラメーター s, t を用いて表せ。

$$(1) z = 4 + x^2 + y^2 \quad (2) \text{ 原点を中心とした半径 } a (z \geq 0) \text{ の半球面}$$

■ 解

(1)

$$x = s, \quad y = t, \quad z = 4 + x^2 + y^2 = 4 + s^2 + t^2$$

とおくことができるから、

$$\mathbf{r}(s, t) = s\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (4 + s^2 + t^2)\mathbf{k}.$$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ より、 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 。ここで、 $x = s, y = t$ とすれば、
 $z = \sqrt{a^2 - s^2 - t^2}$ 。よって、

$$\mathbf{r}(s, t) = s\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{a^2 - s^2 - t^2}\mathbf{k}.$$

問題 47 次式、

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(x, y)\mathbf{k}$$

で表される曲面がある。

- (1) 偏導関数 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ および $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ を計算せよ。
- (2) 偏導関数 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ および $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ は、何を表しているか。図を書き、図形的意味を述べよ。
- (3) 外積

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$$

は、どの方向を向いているか。

- (4) この曲面の単位法線ベクトルを求めよ。

問題 48 曲面上に微小な面積 dS を考える。この微小な面積は、面に対して接していると
 し、その法線ベクトルは $\mathbf{n}$ で与えられる。

- (1) この問題文の様子を図示せよ。
- (2) この微小な面の xy 平面への射影を考えたい。 xy 平面に射影された面積を求めよ。

$\Rightarrow xy$ 平面への射影とは、 z 軸方向から平行光線を当てたとき xy 平面に映る陰である。

10 積分の原理

■ 基本事項 積分は線の長さや面積や体積を求めるためのものではない。「積分」は字のとおり、基本は「分けて、積み上げる」計算である。何を分けるかによって、「線積分」、「面積分」、「体積分」と呼び方が変わってくる。

関数 $y = f(x)$ を $x = a$ から $x = b$ まで x に対して積分することを考える。

1. 分ける

「分ける」: $x = a$ から $x = b$ までの線分を細かく分ける。どのように分けてもいいが、今は n 等分したとする。その長さを Δx とすると、

$$\Delta x = \frac{a-b}{n}$$

となる。

2. 関数をかける

上で求めた幅 Δx とそこでの関数値の積を計算する。

n 等分した中の i 番目の点の x 座標は、

$$x_i = a + \frac{a-b}{n}i$$

で与えられる。よって、そこでの関数値は、

$$f(x_i) = f\left(a + \frac{a-b}{n}i\right)$$

となる。これに、 Δx をかけると、

$$f(x_i)\Delta x = f\left(a + \frac{a-b}{n}i\right) \frac{a-b}{n}$$

を得る。

3. 積み上げる

「積み上げる」とは、上での計算をすべての点で行い足す。つまり、

$$f\left(a + \frac{a-b}{n} \cdot 1\right) \frac{a-b}{n} + f\left(a + \frac{a-b}{n} \cdot 2\right) \frac{a-b}{n} + \dots$$

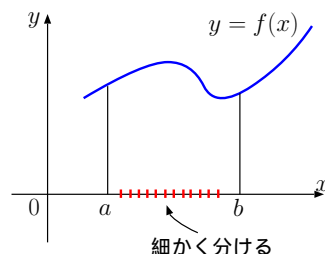


図 3: 細かく分ける

$$\dots + f\left(a + \frac{a-b}{n} \times i\right) \frac{a-b}{n} + \dots + f\left(a + \frac{a-b}{n} \times n\right)$$

これを、総和の記号 $\sum$ を用いて書くと、

$$\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{a-b}{n} \times i\right) \frac{a-b}{n} = \sum_{i=1}^n f(a + \Delta x \times i) \Delta x$$

4. 幅を無限に小さく

n 等分を無限大にして、限りなく細かく分ける。これを式で書くと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(a + \Delta x \times i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

と積分記号 $\int$ を用いて書く。

■ 積分とは、

1. 細かく分け、
2. 分けたものと関数値の積を計算し、
3. その計算を細かく分けた全部に対して行い、
4. その総和を計算する。

この原理が理解できれば、線積分、面積分、体積分も理解できる。

☞ 電磁気学などの物理では、正確に計算するより、このような原理を理解し、暗算で線積分や面積分などを考えることが多い。数式は正確であるが、イメージが湧かない。イメージが湧くように訓練せよ。

【用語】 積分、線積分、面積分、体積分

重要ポイント

- 積分は、線の長さ、面積、体積を求めるだけのものではない。
- 積分で、線の長さ、面積、体積が求まったのは、積分の応用の一部。
- 積分の基本は、細かく分けて、分けた値にそこでの関数値をかけて、それらを足し合わせる。
- 「… に対して積分する」とは、… を細かく分けることを意味している。

11 線積分の計算

■ 基本事項 線に対しての積分を線積分と言う．線の長さを求める積分ではない．高校の時に， x (x 軸) に対して積分をしたが，これは線が直線の場合で，線積分の特殊な場合と考えることができる．

関数 f の曲線 C に沿っての線積分を考える．関数 f は，曲線 C 上で定義されているとする．積分の原理 (23 ページ) に従って，曲線 C を細かく分ける (n 個に分ける)．分けた部分の長さを ΔL として， P_1 から P_n まで番号をつける．

i 番目の部分の関数値と長さ ΔL の積の総和を考えて，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta L = \int_C f(P) dL.$$

☞ 考えにくいときには，曲線をピンと伸ばして x 軸に重ねれば，高校の時の積分と同じ．

例題

曲線 C を点 $(0, 0)$ と点 $(1, 1)$ を結ぶ線分とすると，次の積分を計算せよ．

$$\int_C (x^2 + y^2) ds$$

■ 解 曲線 C をパラメーター表示すると，

$$x = t, y = t \quad 0 \leq t \leq 1$$

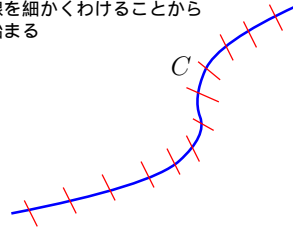
曲線 C の長さ s は，

$$s = \sqrt{2}t$$

と書けるから， $ds = \sqrt{2}dt$ である．よって，積分は，

$$\int_C (x^2 + y^2) ds = \int_0^1 (t^2 + t^2) \sqrt{2} dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

線を細かくわけることから
始まる



問題 49 例題の関数 $f(x, y) = z = x^2 + y^2$ を考える．

- (1) この関数のグラフを描け．
- (2) 曲線 C (原点 $(0, 0)$ と $(1, 1)$ を結ぶ線分) をグラフに記入せよ．
- (3) 例題でなぜ曲線の長さ s とパラメーター t の関係を求めたのか．
- (4) 一般に，関数 $g(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの曲線の長さ L (弧長) を与える式を示せ．

問題 50 関数 $z = f(x, y) = x(y + 1)^2$ に対し線積分

$$\int_C x(y + 1)^2 ds$$

を次の順序で求めよ．ただし，曲線 C は，円 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ の $(0, 0)$ から $(1, 1)$ へ向かう曲線とする．

- (1) 曲線 C を図示せよ．
- (2) 曲線 C 上の点 (x, y) をパラメーター θ を用いて表せ．
- (3) 積分を求めよ．

問題 51 例題の関数 $f(x, y) = z = x^2 + y^2$ を考える．曲線 C を原点を中心とした半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ としたとき，

$$\int_C (x^2 + y^2) ds$$

を積分の原理に立ち返って考え，暗算で計算せよ．

☞ 電磁気学などの物理では，まじめに計算するのではなく，この問題のように原理に戻って暗算で計算することが多い．その方が，計算にわずらわされることなく物理的イメージを捉えることができる．

【用語】 線積分

重要ポイント

- 線積分は，線の長さを求める積分ではない．
- 線積分は，線に対して行う積分．積分の原理 (23 ページ参照)

12 面積分の計算

■ 基本事項 面に対しての積分を面積分または面積積分と言う．面積を求める積分ではない．高校の時に，積分によって面積を求めることができたが，それを面積分とは言わなかった．

関数 f の面 S に対しての面積分を考える．関数 f は，面 S 上で定義されているとする．積分の原理 (23 ページ) に従って，面 S を細かく分ける (n 個に分ける)．分けた部分の微小な面の面積を ΔS として， P_1 から P_n まで番号をつける．

i 番目の部分の関数値と面積 ΔS の積の総和を考えて，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S = \int_S f(P) dS.$$

となる．

例題

次の面積分を計算しなさい．

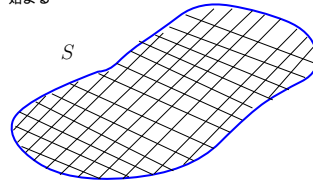
$$I = \int_S (x^2 - 3xy) dS \quad S: 1 \leq x \leq 2, \quad \frac{1}{x} \leq y \leq 2$$

■ 解

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 x dx \int_{1/x}^2 (x - 3y) dy = \int_1^2 x \left(2x - 7 + \frac{3}{2x^2} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} \log 2 - \frac{35}{2}. \end{aligned}$$

☞ この問題は，面が平面の一番簡単な場合．

面を細かく分けることから
始まる



問題 52 半径 R の円盤があり，その密度分布 ρ は中心からの距離 r の関数であり，次式で与えられている．

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

この円盤の質量 M を以下の手順で求めよ．次の手順でこの球体の質量 M を求めよ．

- (1) 質量密度分布 $\rho(r)$ のグラフを書け．
- (2) 半径 r と $r + dr$ にはさまれた領域の面積 dS を求めよ．
- (3) 半径 r と $r + dr$ にはさまれた領域の質量 dM を求めよ．
- (4) 質量 M を求めよ．

問題 53 スカラー場 f が次式で与えられている．

$$f(x, y, z) = \frac{2y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

放物面 $S: x^2 + y^2 + z = 4, \quad z > 0$ の上での面積分を求めよ．

☞ ヒント 放物面を細かく分けてその上での関数値を考えても計算が難しい．細かく分けた微小な面積を xy 平面に射影するとよい．そうすれば，積分を xy 平面で行うことができる．つまり，

$$\int \dots dx dy$$

とすることができる．

☞ 射影に関しては，22 ページの練習問題 48 を参照．

【用語】 面積分，面積積分

重要ポイント

- 面積分は，面積を求める積分ではない．
- 面積分は，面に対して行う積分．積分の原理 (23 ページ参照)

練習問題

13 体積分の計算

■ 基本事項 体積に対しての積分を体積分または体積積分と言う．体積を求める積分ではない．高校の時に， x 軸の回りに図形を回転させ，積分によって体積を求めることができたが，それを体積分とは言わなかった．

積分する領域の体積を細かく分けそれを ΔV とし，そこでの関数値をかけて，その総和を取り，極限を考える．

関数 $\phi(x, y, z)$ の領域 R に対する体積分は，

$$\int_R \phi(x, y, z) dV$$

と書く．カーテシアン座標系においては，

$$dV = dx dy dz$$

となる．普通の 3 重積分である． $\phi = 1$ とおけば，領域 R の体積 V を知ることができる．

例題

次の体積分を計算しなさい．

$$\int_V (x + y + z) dx dy dz, \quad V: x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1$$

■ 解

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dx dy dz = \frac{1}{8}.$$

問題 54 領域 R の内部に電荷密度 $\rho(x, y, z)$ なる関数で分布している．

$$\int_R \rho(x, y, z) dV$$

は，何を表すか．

問題 55 地球の内部の密度分布が $n(x, y, z)$ で表されている．地球の質量 M を求める式を書け．

問題 56 半径 R の球体の質量密度分布 ρ が中心からの半径 r の関数であり，次式で表されている．

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

次の手順でこの球体の質量 M を求めよ．

- (1) 質量密度分布のグラフを書け．
- (2) 半径 r と $r + dr$ にはさまれた領域の体積 dV を求めよ．
- (3) 半径 r と $r + dr$ にはさまれた領域の質量 dM を求めよ．
- (4) 質量 M を求めよ．

【用語】 体積分，体積積分

重要ポイント

- 体積分は，体積を求める積分ではない．
- 体積分は，体積に対して行う積分．積分の原理 (23 ページ参照)

14 ベクトルの線積分の計算

■ 基本事項 電磁気などで出てくるベクトルの線積分は、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{\ell} \quad (16)$$

である。ここで、 C は経路 (曲線) を意味している。経路に沿った微小ベクトル $d\mathbf{\ell}$ とベクトル $\mathbf{A}$ の内積の総和である。ベクトル $d\mathbf{\ell}$ は、

- 経路 C の接線方向を向き、
- 長さが $d\ell = |d\mathbf{\ell}|$

である。

$d\mathbf{\ell}$ とそこでのベクトル $\mathbf{A}$ のなす角を θ とすれば、それらの内積は、

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{\ell} = |\mathbf{A}|d\ell \cos \theta$$

と書くことができる。これを経路 C に沿って計算し、和をとればよい。

例題

ベクトル関数 $\mathbf{f} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ の積分

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ。ただし、 C は、 $(0, 0, 0)$ と $(1, 1, 1)$ を結ぶ線分とする。

■ 解 C はパラメーターを用いて、 $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ と書けるから、

$$d\mathbf{r} = dt\mathbf{i} + dt\mathbf{j} + dt\mathbf{k}$$

と書ける。また、 $\mathbf{f}$ は、 $\mathbf{f} = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ であるから、積分は、

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t + 2t + t)dt = \int_0^1 4tdt = 2.$$

問題 57 次のことがらを図示せよ。

- (1) $d\mathbf{\ell}$ が、「経路 C の接線方向を向き」、「長さが $d\ell = |d\mathbf{\ell}|$ 」である様子。
- (2) $d\mathbf{\ell}$ とそこでのベクトル $\mathbf{A}$ の内積。

問題 58 線積分の経路 C が、原点を中心とした xy 平面上の半径 a の円周であるとする。

- (1) この経路 C の図を書け。
- (2) 円周上の任意の点 (x, y) をパラメーター θ を用いて表せ。
- (3) 円周上の任意の点 (x, y) に接する大きさが $d\ell$ であるベクトルの x 成分、 y 成分を上 θ を用いて表せ。
- (4) ベクトル場 $\mathbf{A}$ が、常に経路 C の接線方向と 60° の角度をなして、大きさが $|\mathbf{A}| = A$ で一定であるとする。内積 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{\ell}$ を求めよ。 $d\ell$ の大きさは、 $d\ell$ とせよ。
- (5) 線積分 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{\ell}$ を求めよ。

問題 59 次のベクトル場を考える。

$$\mathbf{A} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

- (1) このベクトル場の xy 平面上での様子を描け。また、このベクトル場を言葉で説明せよ。
- (2) 経路 C を原点を中心とした xy 平面上の半径 a の円としたとき、線積分 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{\ell}$ を暗算で求めよ。

☞ この問題が理解できれば、アンペアの周回積分はイメージできている。

【用語】 ベクトルの線積分、線素

重要ポイント

- 微小線素ベクトルを考え、そこでの内積の総和を考える。

練習問題

15 ベクトルの面積分の計算

■ 基本事項 電磁気などで出てくるベクトルの面積分は、

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (17)$$

である。ここで、 S は面を意味している。微小面分ベクトル $d\mathbf{S}$ とベクトル $\mathbf{A}$ の内積の総和である。ベクトル $d\mathbf{S}$ は、

- 面の法線方向を向き、
- 大きさが $dS = |d\mathbf{S}|$

である。

例題

ベクトル関数 $\mathbf{f} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ とし、 S を平面 $z = 2$ 上の $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ の領域とすると、

$$\int_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

を求めよ。

■ 解 S 上の $d\mathbf{S}$ は、 z 軸方向を向いているから、

$$d\mathbf{S} = dS\mathbf{k}$$

である。よって、

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 2dS = 2dxdy$$

以上より積分は、

$$2 \int_0^2 \int_0^2 dxdy = 8.$$

☞ この問題は、領域 S が平面であり、 $\mathbf{f}$ との内積も簡単に計算できる一番簡単な場合である。

問題 60 ベクトル関数 $\mathbf{f} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ とし、 S を放物面 $x^2 + y^2 = 1 - z, z \geq 0$ の部分とすると、

$$\int_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

を求めよ。

問題 61 $\mathbf{r}$ を原点からの位置ベクトルとすると、ベクトル場 $\mathbf{A}$ が次のように定義されている。

$$\mathbf{A} = k \frac{1}{r^2} \mathbf{r}$$

ここで、 r は、ベクトル $\mathbf{r}$ の大きさとする。つまり、 $|\mathbf{r}| = r$ である。また、 k は、 $k > 0$ の定数とする。

- (1) この式の $\frac{\mathbf{r}}{r}$ は、何を表しているか。
- (2) このベクトル場をイメージする図を描け。また、このベクトル場の様子を言葉で説明せよ。
- (3) 原点を中心とした半径 a の球面を考える。球面上に大きさが dS で、向きが面の法線方向のベクトル $\mathbf{n}dS = d\mathbf{S}$ を考える。この様子を図にせよ。
- (4) 上で考えたベクトル $d\mathbf{S}$ とそこでのベクトル場 $\mathbf{A}$ との内積

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

の値を計算せよ。

- (5) 半径 a の球面を S とするとき、

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

を計算せよ。

- (6) 半径 $2a$ の球面を S としたとき、

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

の計算は、どうなるか。

16 ガウスの定理

■ 基本事項 一つの閉曲面 S に囲まれた領域 V にある連続なベクトル関数を A とすると、一般に次の式が成り立つ。

$$\int_V \nabla \cdot A dV = \int_S A \cdot dS \quad (18)$$

これを、ガウスの定理という。体積分という 3 次元の計算が、面積分つまり 2 次元の計算に簡単化できる。電磁気学では、発散の体積分を面積分に変形するときに用いることが多い。

例題

電磁気学で用いられるマクスウェルの方程式の中でガウスの定理が適用して、簡単化できるのはどの式か。

■ 解 マクスウェルの方程式の中で、発散が式の中に入っているものを探し、それを体積分すればよいから、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

の二つである。最初の式の両辺を体積分すると、

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

ガウスの定理を用いると、

$$\text{左辺} = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV.$$

右辺の積分は、総電荷 Q と書くことができるから、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

問題 62 ガウスの定理を説明したい。

- (1) 領域 V と閉曲面 S を表す図を書け。
- (2) 面積分をするときの、 dS は、どのようなベクトルが説明し、上で書いた図に書き入れよ。

問題 63 r を位置ベクトルとする。閉曲面 S で囲まれた領域の体積を V とするとき、

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 3V$$

が成り立つことを示せ。

問題 64 V は、閉曲面 S で囲まれた領域とし、位置ベクトル r の大きさを r とする。つまり、 $|r| = r$ 。このとき、

$$\int_V \frac{1}{r^2} dV = \int_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^2}$$

を示せ。

問題 65 任意の閉曲面 S について、ベクトル関数 A が

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

を満たすことを示せ。

【用語】 ガウスの定理、体積分、面積分、閉曲面

重要ポイント

- ガウスの定理によって、発散の体積分は、面積分に変換することができる。
- 電磁気学でよく用いられる。

17 ストークスの定理

■ 基本事項 単一閉曲線 C に囲まれた曲面を S とし, A を S と C で連続で 1 次偏導関数をもつベクトル関数とすると, 一般に

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (19)$$

これを, ストークスの定理という. 電磁気学では, 回転の面積分を線積分に変形するとき用いることが多い.

例題

電磁気学で用いられるマクスウェルの方程式にストークスの定理が適用して, 簡単化できるのはどの式か.

■ 解 マクスウェルの方程式の中で, 回転が式の中に入っているものを探し, それを面積分すればよいから,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

の二つである. 最初の式に関して, 両辺を面積分すると,

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

であり, ストークスの定理を用い, 磁束 Φ を磁束密度の面積分と定義すれば,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

となり, 誘導起電力を表す式となる.

問題 66 ストークスの定理を説明したい.

- (1) 開曲面 S と閉曲線 C を表す図を書け.
- (2) 線積分をするときの, $d\boldsymbol{\ell}$ は, どのようなベクトルか, 上で書いた図に書き入れよ.

問題 67 位置ベクトル $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ に対して,

$$\int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

を証明せよ.

問題 68 閉曲面 C に対して,

$$\int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = 0$$

を示せ.

問題 69 磁束 Φ は, 磁束密度 $\mathbf{B}$ の面積分として,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

で定義されている. 一方, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

で定義されている. 磁束 Φ をベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の線積分で表せ.

【用語】 ストークスの定理, 面積分, 線積分, 閉曲線, 開曲面, 磁束, ベクトルポテンシャル

重要ポイント

- ストークスの定理によって, 回転の面積分は, 線積分に変換することができる.
- 電磁気学でよく用いられる.

18 線形 1 階微分方程式の計算

■ 基本事項 一番簡単な微分方程式である．これについては，高校で学習している．次の形の微分方程式を線形 1 階微分方程式という．

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (20)$$

ここで， $f(x, y)$ は， x と y の関数である．

解法 $f(x, y)$ が $f(x)$ の場合の解法を示す．記号的に，両辺 dx をかけて，

$$dy = f(x)dx$$

両辺積分して，

$$\int y dy = \int f(x) dx$$

よって，

$$y = F(x) + C$$

ここで， C は，初期条件で決まる積分定数．

例題

次の微分方程式を解きなさい．かつこの中は，初期条件である．

$$(1) y' = 2x + 1 \quad (x = 0 \text{ で } y = 1)$$

■ 解

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x + 1$$

よって，

$$dy = (2x + 1)dx$$

両辺積分して，

$$\int dy = \int (2x + 1)dx + C = x^2 + x + C$$

初期条件より， $C = 1$ だから， $y = x^2 + x + 1$ ．

練習問題

以下の問題を次式の運動方程式の微分方程式を立て，それを解くことによって求めよ．さらに，それが高校のときの解き方と解が一致することを確認せよ．

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

問題 70 角度 θ の滑らかな斜面に質量 m の物体を置いた．この物体を時刻 $t = 0$ において静かに滑らせた． t 秒後の位置と速度を求めよ．重力加速度を g として計算せよ．

問題 71 初速度 v_0 で，物体を時刻 $t = 0$ において鉛直上向きに投げ上げた．重力加速度を g として計算せよ．

- (1) t 秒後の位置と速度を求めよ．
- (2) この物体が最高点に達するまでの時間 t_1 はいくらか．
- (3) 元の位置に戻ってくるのは，時間 t_2 を求めよ．
- (4) 元の位置に戻ってきた時の速度 v' はいくらか．

問題 72 高さ h のビルの屋上から，質量 m の物体を水平方向に v_0 の初速度で投げ出した．物体が地面に達するまでの時間とその瞬間の速度を求めよ．また，この物体はビルの前方どれだけの位置に落下するか．

【用語】 微分方程式，初期条件

重要ポイント

- 運動方程式は，微分方程式．

19 線形 2 階微分方程式の計算

■ 基本事項 物理現象の中には線形 2 階微分方程式を計算することによって理解できるものが数多くある。この微分方程式は、ラプラス変換を用いて解くこともできるが、ここでは特性方程式を用いた解法を示す。

a, b, c を実定数として、二階の線形微分方程式

$$ay'' + by' + cy = 0$$

の解を考える。ここで、 $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とする。

λ に関する二次方程式

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (21)$$

を特性方程式と呼ぶ。

この特性方程式を解くと、

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となる。

i) $b^2 - 4ac \neq 0$ のとき、異なる 2 根をもつ。この根を $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ とする。

ii)-1. $b^2 - 4ac > 0$ のとき、 λ_1, λ_2 は、異なる実数である。一般解は、

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (22)$$

ここで、 C_1, C_2 は、初期値で決まる定数。

ii)-2. $b^2 - 4ac < 0$ のとき、 λ_1, λ_2 は、異なる複素数である。一般解は、上の場合と同様に

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (23)$$

ところが、 λ は、複素数であるので、 $\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega$ と書くことができる。 μ, ω は、実数。 i は、虚数単位で、 $i^2 = -1$ を満たす。これを解に代入すると、

$$y = C_1 e^{-\mu x + i\omega x} + C_2 e^{-\mu x - i\omega x} = e^{-\mu x} (C_1 e^{+i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x})$$

と書ける。オイラーの公式より、

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

を使い、 A, B を実数とすると ($A = C_1 + C_2, B = i(C_1 - C_2)$)

$$y = e^{-\mu x} (A \cos \omega x + B \sin \omega x) \quad (24)$$

となる。

ii) $b^2 - 4ac = 0$ のとき、特性方程式の解は、重根となる。その根を λ とすると、

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x} \quad (25)$$

となる。

練習問題

問題 73 次の微分方程式の一般解を求めよ。 $(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ とする。})$

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (1) $y'' + 9y = 0$ | (2) $y'' - 5y' + 6y = 0$ |
| (3) $y'' - 6y' + 9y = 0$ | (4) $y'' + 4y' + 5y = 0$ |
| (5) $y'' - 3y' + 2y = 0$ | (6) $y'' - 3y' = 0$ |
| (7) $y'' + 4y' + 4y = 0$ | (8) $y'' + 2y' + 2y = 0$ |

問題 74 次の微分方程式を以下の初期条件で解け。ただし、 k は、実数とする。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

- (1) $x = 0$ において、 $y = h, \frac{dy}{dx} = 0$ (2) $x = 0$ において、 $y = 0, \frac{dy}{dx} = v_0$

【用語】 線形二階微分方程式、特性方程式

重要ポイント

- 物理現象は、線形二階微分方程式で記述できるものが多い。
- 特性方程式の解の形で、微分方程式の形は 3 通りになる。

20 偏微分と全微分

■ 基本事項 多変数関数 $f(x, y, \dots)$ において, x 以外の変数を止めて, x だけを変化させたときの極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, \dots) - f(x, y, \dots)}{h}$$

が存在するとき, これを偏微分係数と言う. 実際の計算は, x 以外の変数を定数と思って計算すれば良い.

関数 f の x による偏微分 (偏導関数) を

$$\frac{\partial f}{\partial x}, f_x$$

と表す. 図形定期には, ある点から「 x 方向」に進んだら f は, どのような変化 (微分係数) をするかを表している.

2 変数関数 $f(x, y)$ に対して, 次で定義される量を全微分と呼ぶ.

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad (26)$$

例題

次の式を偏微分せよ.

(1) $f = x^2 + y^2$ (y で偏微分) (2) $f = a^2 + x^2$ (a で偏微分)

■ 解 (1) $\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = 2y$ (2) $\frac{\partial(a^2 + x^2)}{\partial a} = 2a$

問題 75 次の関数 u は, $\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ をみたすことを示せ. ここで, u_{xx} は, x による 2 階偏微分を表す.

(1) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ (2) $u = \log \sqrt{x^2 + y^2}$

問題 76 関数 $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ について次の問いに答えよ.

- (1) このグラフを $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ の範囲で書け.
- (2) この関数を x および y について偏微分せよ.
- (3) 点 $(2, 0)$ における偏微分係数を求めよ.
- (4) 上の問題の偏微分係数が図では何を表しているか. (1) で求めた図に書き入れよ.

【用語】 偏微分, 全微分, 偏微分係数, 多変数関数, ラプラシアン

重要ポイント

- 偏微分は, 他の変数を定数と見て微分すればよい.
- 偏微分係数は, その方向の微分係数である.

21 近似式

■ 基本事項

物理学では、計算を簡単にするために様々な近似式が使われる。これらの近似式は、テーラー展開することで求めることができる。\$f(x)\$ の \$x = a\$ (の近傍) におけるテーラー展開は、

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \quad (27)$$

で表される。このようにテーラー展開とは、\$x = a\$ での関数値 \$f(a)\$ が分かっている、その近くの点 \$x = a + \Delta x\$ の関数値 \$f(x) = f(a + \Delta x)\$ の値は、どのように表すことができるかを考えている。であるから、\$f(x) = f(a + \Delta x)\$ の値は、\$x = a\$ での値 \$f(a)\$ に少し加えたものになることは、容易に考えられる。

例題

\$f(x) = \sin x\$ を \$x = 0\$ においてテーラー展開せよ。

■ 解 式 (27) を用いて \$x = a\$ の近傍で展開すると、

$$f(x) = \sin a + \cos a \frac{(x-a)}{1!} - \sin a \frac{(x-a)^2}{2!} - \cos a \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

ここで、\$a = 0\$ とすると、

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$$

となる。\$|x| \ll 1\$ のときは、\$x^2\$ 以上の項は 0 と見なして、

$$f(x) = \sin x \approx x$$

と近似する。

問題 77 関数 \$y = f(x)\$ がある。\$x = a\$ での \$y\$ の値を \$f(a)\$ とする。このとき、\$x = a + \Delta x\$ での \$y\$ の値 \$f(a + \Delta x)\$ が、

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x$$

となることを図を書いて示せ。

問題 78 関数 \$f(x) = \cos x\$ と \$g(x) = (1+x)^\alpha\$ を \$x = a\$ においてテーラー展開せよ。

問題 79 \$a \ll b\$ のとき、次の式を近似式が使える形に変形せよ。

$$(1) a^2 + b^2 \quad (a^2 + b^2)^{1/2}$$

問題 80 次の式を近似式を用いて、計算せよ。どの場合も、\$x\$ は、0 に非常に近いとする。

$$(1) \sqrt{1+x} \quad (2) \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (3) \sin x \text{ (} x \text{ の単位は、度。)}$$

よく使われる近似式

$$\begin{aligned} (1 \pm x)^\alpha &\approx 1 \pm \alpha x, & x &\approx 0 \\ e^x &\approx 1 + x, & x &\approx 0 \\ \sin \theta &\approx \theta, & \theta &\approx 0 \\ \cos \theta &\approx 1, & \theta &\approx 0 \\ \tan \theta &\approx \theta, & \theta &\approx 0 \end{aligned}$$

【用語】 テーラー展開、近似式

重要ポイント

- 既知の関数値の近傍の値を知るときに、テーラー展開が使われる。

22 複素数とオイラーの式

■ 基本事項

二乗して -1 となる数を i で表す．一般に複素数は， a, b を実数としたとき， $a + ib$ で表すことができる．

物理学では，三角関数で計算するより複素数で計算する方が簡単なため複素数で計算することが多数ある．たとえば，交流電圧を表現するために複素数を使った．また，波動を表現するためにも複素数が用いられる．複素数は現実の世界では存在しない数であり，現実の値を考える物理学では計算した結果の実部だけ，または複素数の大きさだけが意味がある．

三角関数と複素数の関係は，次のオイラーの式によって関係付けられている．

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad (28)$$

例題

振幅 E_0 ，角周波数 ω の電圧 E の複素数表示を書け．その実部が実際の電圧であることを示せ．

■ 解 電圧の複素数表示は， $E_0 e^{i\omega t}$ で表される．これをオイラーの式を使って三角関数で表すと，

$$E_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

よって，この実部 $E_0 \cos \omega t$ が実際の電圧を表している．

☞ 高校の物理では，交流電圧を複素数を用いずに $E_0 \cos \omega t$ で表した．

問題 81 オイラーの式から， $\sin \theta, \cos \theta$ を導け．

問題 82 $e^{i\theta}$ を極座標上に表示せよ．このとき， $\cos \theta$ が実軸の値となり， $\sin \theta$ が虚軸の値となることを確認せよ．

問題 83 $\sqrt{i}$ を計算せよ．

問題 84 e^x のテーラー展開に $x = i\theta$ を代入し，実部と虚部を分けて表し，実部の無限級数が $\cos \theta$ ，虚部の無限級数が $\sin \theta$ となることを確かめよ．(オイラーの式を確かめよ．)

問題 85 双曲線関数 $\sinh x, \cosh x$ が以下のように定義されている．

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

このとき， $\sinh i\theta$ と $\cosh i\theta$ を計算せよ．

【用語】 複素数，オイラーの式

重要ポイント

- 三角関数の計算は複素数で行うと簡単になる場合がある．
- 複素数で行った計算結果で物理的に意味のあるのは，その実部のみ，またはその大きさ．

練習問題

23 偏微分方程式の計算

■ 基本事項 電磁気学で出てくる偏微分方程式は、ポアソン方程式、ラプラス方程式、波動方程式そして拡散方程式である。

一般に、三次元の波動方程式は、

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (29)$$

で表される。ここで、 v は速度である。一次元ならば、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (30)$$

と書くことができる。

また、一般に拡散方程式は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = K \nabla^2 \phi \quad (31)$$

で表される。ここで、 K は拡散係数である。一次元ならば、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (32)$$

と書くことができる。

これらの偏微分方程式の解法は、変数分離を用いて解くことができるが、ここでは述べない。専門書をご覧いただきたい。

例題

一次元の波動方程式 式 (30) が、 $\phi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ を満足することを示せ。

■ 解 代入して、微分を実行する。

$$\text{左辺} = -Ak^2 \sin(kx - \omega t), \quad \text{右辺} = -\frac{1}{v^2} \omega^2 A \sin(kx - \omega t)$$

$v = \frac{\omega}{k}$ を用いると、両辺は等しい。

問題 86 x 方向へ伝搬する振幅 A 、波数 k 、角周波数 ω の波を記述する式を示せ。

問題 87 電磁波の電場を考える。一般に電場 $E(\mathbf{r}, t)$ は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

で表される。 k の大きさと向きは何か。

問題 88 真空中のマクスウェル方程式

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

から、真空中の電磁波 (電場) の波動方程式を導け。

【用語】 偏微分方程式、ポアソン方程式、ラプラス方程式、波動方程式、拡散方程式

重要ポイント

- 電気電子工学科の学生が理解すべき偏微分方程式の形は、ポアソン方程式、ラプラス方程式、波動方程式、拡散方程式の4つである。
- 重要な偏微分方程式は、マクスウェル方程式。