

11 波動

高校の復習

$x > 0$ の方向に伝搬する波動は,

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

で表された．ここで, A :振幅, T :周期, λ :波長である． $2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ を位相と呼ぶ．また, 波の速度 v は,

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda \quad f: \text{周波数}$$

で与えられた．

大学では, これを 3 次元に拡張する．波数ベクトル $\mathbf{k}$ を導入して,

$$\phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

と表す． $\mathbf{r} = (x, y, z)$: 位置ベクトル, $\omega = 2\pi f$ である．

プラズマで扱う波は, 電子の密度, イオンの密度, 電場, 磁場などの伝搬である．つまり, 電子やイオンの密度が伝搬したり, 電場や磁場の強度が空間的に伝搬することを考える．

高校では, 波の式が突然与えられた．しかし, この式は, 次の偏微分方程式の解である．

電気電子工学科の学生の常識 1

次の偏微分方程式の解は, (一次元の) 波動方程式を与える．

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2}$$

ここで, v は, 波動の伝搬速度を与える．

問題 84 波数ベクトル $\mathbf{k}$ の大きさと方向は, 何か．

問題 85 縦波と横波の違いを説明せよ．また, その例を上げよ．

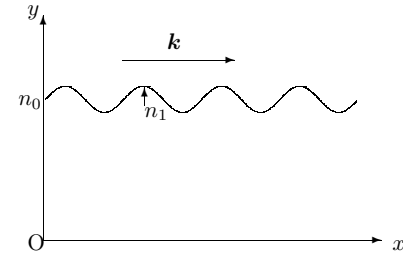
問題 86 振幅 a , 波数 k , 周波数 ω で $+x$ 方向に伝搬する波と $-x$ 方向に伝搬する波の式を書け．

問題 87 波の速度 v を波数 k を用いて表現せよ．また, 速度ベクトル $\mathbf{v}$ は, どのように表現されるか．

問題 88 大学での波動の式には, 虚数単位 i が入っている．なぜ, これが高校での波の式に一致するのか．大学で習った波の式を変形することにより, 高校での波の式を導け．

問題 89 3 次元空間を伝搬する波をイメージする図を描け．

問題 90 図のような x の正の方向に伝搬する波を式で表せ．波数は, k , (角) 周波数は ω とせよ．



問題 91 波動方程式を与える偏微分方程式を 3 次元で書くとうなるか．

問題 92 電気電子工学科の学生が知っておくべき偏微分方程式として, 波動方程式の他に, 熱伝導の方程式, ラプラス方程式がある．どのような形が示せ．

問題 93 次の偏微分方程式について答えよ．

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{9} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

- (1) 変数を分離して 2 つの常微分方程式を導け．(変数を分離するとは, $y(x, t) = X(x)T(t)$ というように, $y(x, t)$ を x だけの関数 $X(x)$ と t だけの関数 $T(t)$ だけの関数の積で表すこと．)
- (2) 波の速さを求めよ．
- (3) 境界条件: $y(0, t) = 0$, $y(2, t) = 0$, $y(x, 0) = 0.05x(2 - x)$, $\frac{\partial}{\partial t}y(x, 0) = 0$ のもとで解け．ただし, $0 \leq x \leq 2$, $t \geq 0$ とする．

12 波動の速度

波動の速度には、**位相速度**と**群速度**の二つがある。波動は、周波数 ω と波数 k で特徴づけられる。一般に、 ω は波数 k の関数であり、 $\omega = \omega(k)$ と表され、**分散関係**または**分散式**と呼ばれる。

プラズマの常識 8

- 位相速度は、ある特定の位相が進む速度 $v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k}$
- 群速度は、波束の進む速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

$k = k_0 + k'$ として、 k_0 の周りでテーラー展開すると、

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{\partial \omega(k_0)}{\partial k_0} \cdot k' + \dots$$

これを、 $e^{i(kx - \omega t)}$ に代入して、

$$= e^{ik'(x - \frac{\partial \omega(k_0)}{\partial k_0} t)} e^{i(k_0 x - \omega(k_0) t)}$$

$a(x - v_g t) = e^{ik'(x - \frac{\partial \omega(k_0)}{\partial k_0} t)}$ とおくと、

$$= a(x - v_g t) e^{i(kx - \omega t)}$$

- 位相速度は、光速 c 以上の速度になることがある。
- 群速度は、常に光速 c 以下である。
- 群速度は、エネルギーの伝搬速度であるとも言える。

問題 94 位相とは何か。また、その単位は何か。

問題 95 周波数 f と角周波数 ω の関係、波長 λ と波数 k との関係を示せ。

問題 96 真空中の光の速度 c は、いくらか。また、 c を真空の誘電率 ϵ_0 と真空の誘電率 μ_0 で表せ。

問題 97 真空中の光速を c としたとき、波長 λ と周波数 f の関係を示せ。

問題 98 群速度とは、何が伝搬する速度であると言えるか。

問題 99 真空中の光の分散式 (ω と k との関係) を求めよ。また、この関係を横軸を k 、縦軸を ω で描け。

問題 100 関数 $y = x + \frac{1}{x}$ のグラフを $x > 0$ の範囲で描け。このグラフの漸近線も求めて、書き入れよ。

問題 101 関数 $y^2 = a^2 + b^2 x^2$ (a, b は定数) のグラフを描け。このグラフの漸近線も求めて、書き入れよ。

問題 102 分散関係が $\omega^2 = a^2 + b^2 k^2$ (a, b は定数) で与えられている。位相速度 v_{ph} と群速度 v_g を k の関数として表せ。また、分散関係のグラフ (横軸 k 、縦軸 ω)、位相速度のグラフ (横軸 k 、縦軸 v_{ph})、群速度のグラフ (横軸 k 、縦軸 v_g) を書け。

問題 103 関数 $y = f(x) = \exp(-\frac{x^2}{a})$ のグラフと $y = f(x - k)$ のグラフを書け。ここで、 a, k は、正の定数とする。

問題 104 α と σ が正の定数で、波数 k 、角周波数 ω の波が以下の式で表されているとする。

$$y(x, t) = a \exp\left(-\frac{(x - \alpha t)^2}{\sigma^2}\right) \cos(kx - \omega t).$$

このグラフを $t = 0$ において書け。また、 $t = \beta$ ($\beta > 0$) では、どのようなグラフになっているか。