

9 流体方程式

流体方程式とはプラズマを記述する方程式の一つである。プラズマを電子の流れ (集団運動) として取り扱う。流体として、空気の流れを考えると、空気の速度 v は、場所と時間の関数であり、また、密度 n も場所と時間の関数になっている。このように、密度と速度の空間的、時間的変化の様子を流体方程式は、記述する。

プラズマの流体方程式は、以下の方程式群から構成されている。

1. プラズマの運動を記述する運動方程式

$$nm \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right] = qn(E + v \times B) + \text{圧力項} + \text{衝突項}$$

2. 連続の式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nv) = 0$$

3. その他 Maxwell の方程式。

縦横高さが $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ の箱 (流体要素と言う) を考え、そこに入っている粒子の運動を考える。その箱の運動を考えるので、一つの質点のように考えてもよい。ただ、質点と違うのは、中に入っている粒子の個数が変化することがあるので (密度が変化するので)、箱の中の粒子の全質量を一定としてはいけない。であるので、運動方程式における質量 m を、 mn として考える。

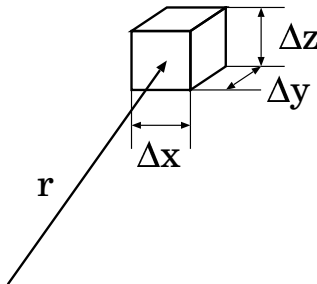


図 1: 流体要素。位置が r の場所に、微小は箱を考え、そこに入っている粒子の運動を考える。その中の粒子は、皆、同じ運動をしていると考える。

【常微分と偏微分】

関数 $f(x, t)$ を t で微分することを考える。ここで、 x も t の関数であるとする。つまり、 $x = x(t)$ である。そのとき、二つの微分が考えられる。

1. 常微分 $\frac{df(x, t)}{dt}$
2. 偏微分 $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$

である。両者の違いは何か?

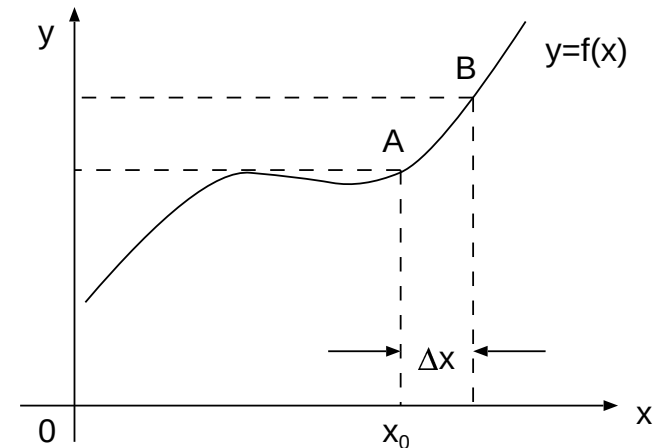


図 2: 微分。図から関数 $y = f(x)$ 上の点 A, B の座標を求めて、点 A での微分がどのような式で表されるか。

常微分の定義より、

$$\frac{df(x, t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{f(x + \Delta x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}$$

である。この式の右辺の分子の第一項は、

$$= f(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \Delta t$$

と表されるから、

$$\frac{df(x, t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \Delta t}{\Delta t} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$$

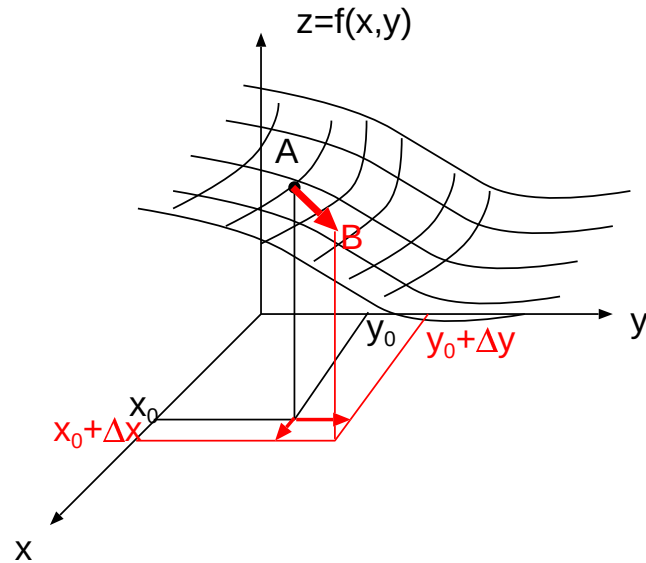


図 3: 偏微分.

次の D/Dt を対流微分, またはラグランジェ微分と言う。右辺の二項目は, 固定された場所での微分, 第二項目は, ある時間での微分。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$$

問題 60 演算 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ の結果は, ベクトルかスカラーか。

問題 61 電磁気学の教科書では連続の式は,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

と書かれている。これが,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0$$

と等価であることを示せ。

問題 62 (1) 関数 $z = f(x, y)$ は, 一般にどのような図形を描きますか。

(2) 関数 $z = f(x, y)$ の偏微分 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ は, それぞれ何を表していますか。図形的意味を図を描いて説明せよ。

問題 63 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ として, $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ を計算し, 成分で表せ。

問題 64 対流微分 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ を示せ。

問題 65 連続の式 $\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0$ を求めよ。また, 連続の式の意味するところを述べよ。

問題 66 連続の式は, $\frac{\partial n}{\partial t} + n\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla n = 0$ とも書けることを示せ。

問題 67 流体方程式で記述されたプラズマでは, プラズマのある性質が欠落している。それは, 何か。

問題 68 流体方程式において, n は, 何の関数か。

問題 69 $v = |\mathbf{v}|$ とするとき,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla(v^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

を示せ。

問題 70 微分の定義を述べよ。一変数関数 $y = f(x)$ についてと多変数関数 $z = f(x, y)$ について, 図を書いて述べよ。

問題 71 次の関数を x, y で偏微分せよ。

$$(1) z = x^2 + 2axy + y^2$$

$$(2) z = x^3 + 3x + y^2$$

$$(3) z = \sin x \cos y$$

$$(4) z = \log \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$