

6 単振動

単振動とは、どのような運動であるかは、理解しているとする。高校で振り子の運動、バネにつながれたオモリの運動などが単振動であった。高校では単振動の運動方程式を解くことは数学的に困難さを伴うため、表には出てこなかった。しかし、バネの問題では、バネ定数を k としたとき、オモりに働く力は、

$$F = -kx$$

と表されることは、学習している。ここで、 x は、釣り合いの位置からの距離であった。単振動を表す微分方程式は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

の形をしている。 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega x$ ではない。常に右辺の x の係数が正であるために、 ω^2 となっている。この方程式は、大学生が理解すべき常微分方程式の一つである。大学生が理解すべき偏微分方程式には、波動方程式、熱伝導方程式などがある。

この微分方程式の解は、特性方程式

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

を解くことによって、 $\lambda = \pm i\omega$ を得るので、

$$x = A \exp(+i\omega t) + B \exp(-i\omega t)$$

を得る。 A, B は初期条件で決まる定数である。たとえば、 $t = 0$ で $x = x_0$, $dx/dt = 0$ であれば、最初の初期条件より、

$$x_0 = A \exp(i\omega \cdot 0) + B \exp(-i\omega \cdot 0) = A + B$$

また、二つ目の初期条件を使うために、解を微分し、

$$\frac{dx}{dt} = i\omega A \exp(i\omega t) - i\omega B \exp(-i\omega t)$$

これに、初期条件を代入すると

$$0 = i\omega A - i\omega B \rightarrow 0 = A - B$$

以上より、 A, B を求めると、

$$A = B = \frac{x_0}{2}$$

となるので、求める解は、

$$x = \frac{x_0}{2} (\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t))$$

となる。ここで終わってもいいが、どうも虚数が入っていると気持ちが悪いので、 $\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t) = 2 \cos \omega t$ となることを思い出して (オイラーの式参照)、

$$x = x_0 \cos \omega t$$

を得る。

問題 48 次の微分方程式で単振動を与えるものはどれか。

- | | |
|---|-----------------------------------|
| (1) $y'' - 8y = 0$ | (2) $\frac{dx^2}{dy^2} + 2y = 0$ |
| (3) $\frac{d^2f}{dg^2} = 6 \frac{df}{dg}$ | (4) $\frac{d^2a}{db^2} + 10a = 0$ |
| (5) $\frac{d^2s}{dk^2} - 2s = 0$ | (6) $\frac{d^2t}{dx^2} = -8t$ |

問題 49 質量 m のオモリが重さのない長さ ℓ のひもの先端に取りつけられている振り子の運動方程式を導きなさい。重力加速度を g とせよ。その運動方程式は、一般には単振動を示さない。どのような仮定をして、単振動の運動方程式としているのか考えなさい。