問題 21 x 方向に対して，$\frac{1}{2}k_BT$ である．それが 3 方向あるから，3 倍している．

問題 22 $\dfrac{1}{2}mv^2$ なので，(粒子一個の平均) エネルギー．

問題 23 等方的という．すべての方向 $(x,\ y,\ z)$ に同じ個数の粒子が向かっていること．

問題 24 気体粒子が容器の内面に衝突するときの運動量の変化 (力積) による．

問題 25 2 乗平均速度は，

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{1}{3}\sum_i^3 v_i^2} = \sqrt{\frac{2^2+3^2+4^2}{3}} = 3.1 \text{ m/s}.$$

☞ 2 乗平均速度は，それぞれの粒子の速度を 2 乗して，それの平均を計算した結果の平方根である．．次の式との違いを明確にせよ．

$$\sqrt{\overline{v}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\sum_i^3 v_i\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2+3+4}{3}\right)^2} = 3 \text{ m/s}.$$

問題 26 速度には，方向がある．熱運動は等方的であるから，速度のまま平均すると，0 になってしまう．

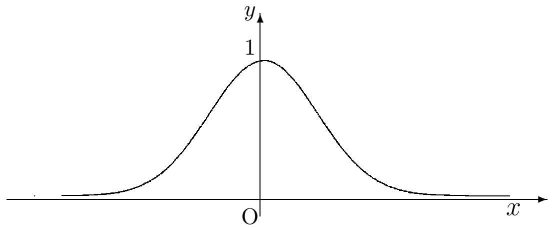
問題 27 式を微分して，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{a^2}\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right)\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$y'=0$ より，$x=0$，$y''=0$ より，$x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ で極値を取る．以上より，増減表は以下の様になる．

x	$\cdots$	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\exp\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\exp\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$

これをグラフにすると，下図．(変極点の座標を入れておくこと．)



問題 28 省略．

問題 29 微分して，

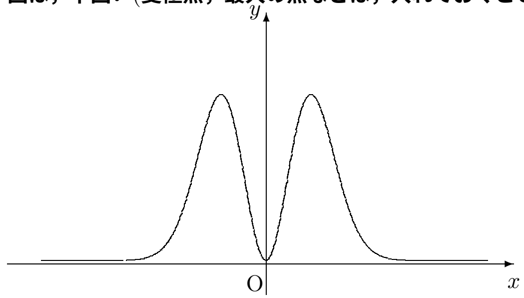
$$\frac{dy}{dx} = 2x\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) - \frac{2x^3}{a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) = 2x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[2-\frac{10x^2}{a^2}+\frac{4x^4}{a^4}\right]\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$y'=0$ より，$x=0,\quad \pm a$．$y''=0$ より，$x=\pm\sqrt{\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}}a$．$\alpha=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}}a$，$\beta=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}}a$ と置いて増減表を書くと，

x		$-\alpha$		$-a$		$-\beta$		0		β		a		α	
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\nearrow$	a^2/e	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	a^2/e	$\searrow$		$\searrow$

図は，下図．(変極点，最大の点などは，入れておくこと．)



問題 30 $A=\{(x,y):0\le x\le a, 0\le y\le a\}$, $B=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le a^2\}$

$I(a) = \int_0^a e^{-t^2} dt$ とおけば，

$$\iint_A e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^a dx \int_0^a e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dy = \left(\int_0^a e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^a e^{-y^2} dy\right) = \{I(a)\}^2$$

$$\iint_B e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^a \left\{\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} \cdot r d\theta\right\} dr = \frac{\pi}{2}\int_0^a e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$$

ここで，$I = \lim_{a\to\infty} I(a)$，$\lim_{a\to\infty} A = \lim_{a\to\infty} B$ だから，$I^2 = \lim_{a\to\infty} \{I(a)\}^2 = \dfrac{\pi}{4}$．

ところが，$I > 0$ は明らか．よって，$I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$．

問題 31 横軸を速度 u，縦軸を分布関数とし，幅 du 高さ $f(u)$ の矩形の面積として与えられる．

問題 32 振った回数は，$\sum_{k=1}^{n} f(k)$．期待値は，

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k f(k)}{\sum_{k=1}^{n} f(k)}$$

問題 34 $1 \times 10^7 / 11600 = 860$ eV．