

練習問題

2 温度

■ 基本事項

温度に関しては、高校の物理Ⅱの教科書には、以下のように書かれている。気体は、数多くの分子の集合体である。各分子は互いに衝突をしながら、いろいろな方向に運動をしている。これを熱運動と言う。温度が高いほど熱運動は激しい。ある温度の気体分子を考えたととき、速いものや遅いものもある。

温度 T は分子の 2 乗平均速度 $\sqrt{v^2}$ を用いて、

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}m\overline{v^2} \quad (1)$$

と定義されている。ここで、 k_B は、ボルツマン定数であり、 $\frac{R}{N_A}$ で定義される。ただし、 R は気体定数、 N_A はアボダゴ口数である。

☞ 定数の値は、41 ページ、付録 C 参照。

例題

(高校物理の問題) 200°C の水蒸気の水分子の 2 乗平均速度を求めよ。水の分子量は 16 とせよ。

■ 解 水分子一個の質量 m は、アボダゴ口数 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ であるので、

$$m = \frac{16 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23}} = 2.66 \times 10^{-26} \text{ kg}.$$

式 (1) より、 $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ に、代入して $\bar{v} = 8.6 \times 10^2 \text{ m/s}$.

☞ 温度 T の単位は、K (ケルビン) $= 273 + T^\circ\text{C}$.

☞ 分子量は、グラム単位で与えられる。

問題 21 なぜ、式 (1) の左辺には、 $\frac{3}{2}$ がつくのか。

問題 22 式 (1) の右辺の次元 (単位) は何か。

問題 23 熱運動している粒子は、いろんな方向に運動しているとしている。これを表現するために大学で学習する物理ではどのような用語を使っているか。

問題 24 密閉された容器の圧力は、何によるものか。

問題 25 3 個の粒子がある。それぞれ速度は $v_1 = 2 \text{ m/s}$, $v_2 = 3 \text{ m/s}$, $v_3 = 4 \text{ m/s}$ であるとする。これらの粒子の 2 乗平均速度を求めよ。

問題 26 なぜ、速度の平均ではなく、速度の 2 乗の平均を考えるのか。

【用語】 ボルツマン定数、気体定数、熱運動、2 乗平均速度、温度

重要ポイント

- 温度は、粒子の平均エネルギーに関係する。
- 粒子には速いものあれば、遅いものもある。
- 粒子はいろんな方向に運動している。

練習問題

3 分布則

■ 基本事項 気体の速度には、速いものもあれば、遅いものもある。これを速度分布と言う。気体の速度分布は、マクスウェル分布に従う。プラズマ粒子（イオンや電子）も気体分子同様に、マクスウェル分布則に従って分布している。一次元のマクスウェル分布関数は、温度を T として、

$$f(v) = A \exp\left(-\frac{1}{2}mv^2/k_B T\right) \quad (2)$$

で表される。ここで、 m 、 v は粒子の質量と速度である。

速度が v から $v + dv$ の間にある粒子の個数 $dn(v)$ は、

$$dn(v) = f(v)dv$$

で表される。

平均速度 $v_{av.}$ 、平均運動エネルギー $E_{av.}$ は、

$$v_{av.} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v f(v) dv}{\int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv}, \quad E_{av.} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}mv^2 f(v) dv}{\int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv} \quad (3)$$

で計算できる。（問題 33 参照）

プラズマの常識 2

温度は、エネルギーと関係がある。プラズマでは、温度の単位を eV で表す。換算は、 $1 \text{ eV} = 11600 \text{ K}$ 。（問題 8, 35 参照。）

問題 27 $y = \exp(-x^2/a^2)$ ($a \neq 0$ の定数) のグラフを、 $-\infty < x < +\infty$ の範囲で描け。このグラフの最大値及び変極点を求めよ。（この式は、Maxwell 分布の式で、 $a^2 = \frac{2k_B T}{m}$, $A = 1$ とおいた式である。）

問題 28 $y = x \exp(-x^2/a^2)$ ($a \neq 0$ の定数) のグラフを $x > 0$ の範囲で描け。このグラフの最大値、変極点を求めよ。

問題 29 $y = x^2 \exp(-x^2/a^2)$ ($a \neq 0$ の定数) のグラフを、 $0 \leq x < +\infty$ の範囲で描け。このグラフの最大値、最小値及び変極点を求めよ。

問題 30

$$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx$$

を計算せよ。

問題 31 グラフでは $f(u)du$ は、どこか。（どう表されるか。）

問題 32 n 面体で出来たサイコロがあり、面に 1 から n までの数字が書かれている。このサイコロは正確に作られていないため、出る数字の確率は等しくない。このサイコロを何回か振ったら、 k ($1 \leq k \leq n$) の数字が $f(k)$ 回出た。サイコロを振った回数は、どのような式で表されるか。また、サイコロの目の期待値（平均値）は、どんな式で表されるか。この問題を解いて、速度の平均やエネルギーの平均を求める式の意味が理解できるか。

問題 33 式 (3) の $E_{av.}$ の定義式を計算することによって、 $E_{av.} = \frac{1}{2}k_B T$ となることを示せ。3 次元の場合は、 $E_{av.} = \frac{3}{2}k_B T$ となる。

問題 34 太陽の温度は、 $1 \times 10^7 \text{ K}$ である。この温度を eV で表せ。

【用語】 マクスウェル分布、速度分布、温度

重要ポイント

- 気体の速度分布は、マクスウェル分布に従う。
- 速度分布則は、全粒子の個数、平均速度、平均エネルギーを与える。
- 温度をエネルギーで表すこともできる。